

**AZAR, ALEATORIEDAD Y PROBABILIDAD: Significados  
Personales en Estudiantes de Educación Media.**

**EDWIN FERNEY MONTOYA VELÁSQUEZ**

Licenciado en Educación: Matemáticas y Física  
Especialista en Didáctica Universitaria

**DIANA PATRICIA LONDOÑO HERRERA**

Licenciada en Educación: Matemáticas y Física

Investigación realizada como requisito parcial para optar al título de  
Magíster en Educación y Desarrollo Humano

**Asesora**

**MARÍA TERESA LUNA CARMONA**

Doctora en Ciencias Sociales. Niñez y Juventud.

**DEPARTAMENTO DE POSTGRADOS  
CENTRO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN Y  
DESARROLLO HUMANO (CINDE) - UNIVERSIDAD DE MANIZALES  
2011**

A mi Madre Aurora Luz, a mi Hermana Luz Janet, a mis Sobrinos Angie  
Manuela y Samuel Camilo, a mi Esposa Lady Diana y a mi Hija Sofía.  
De Edwin

A los estudiantes del grado 10º de la I. E. José Roberto Vásquez Barrio  
Manrique, 2010.

A Yadilza Palacio, quien con seguridad nos mira desde una ventana  
celeste.

Se realiza una manifestación de gratitud al CINDE y a la Universidad de Manizales, en particular, a las maestras María Teresa Luna Carmona, asesora de este trabajo, Ofelia Roldán Vargas, Yicel Nayrobis Giraldo Giraldo y Diana María González Bedoya, quienes contribuyeron significativamente a la expansión de las subjetividades.

Gracias a todos los compañeros y maestros con quienes se compartió esta inigualable experiencia.

Se desea expresar agradecimiento a Eduardo Murillo López por su acompañamiento en la redacción y por su disposición para la discusión de algunas ideas.

# ÍNDICE GENERAL

	Pág.
ÍNDICE	1
LISTA DE TABLAS	3
LISTA DE ESQUEMAS	3
INTRODUCCIÓN	4
CAPÍTULO I	
1. REFERENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	
1.1. Introducción	6
1.2. Descripción del problema	9
1.3. Referentes teóricos del problema	
1.3.1. Investigación en Didáctica de la Probabilidad	10
1.3.2. El significado de objetos matemáticos: su importancia en Didáctica de la Matemática	13
1.3.3. Objetos y Significado en Didáctica de la Matemática	15
1.3.4. El significado de objetos matemáticos y el uso lingüístico	19
1.4. Concepciones de Filosofía Hermenéutica: para la interpretación de significados personales en textos escritos	22
1.5. Antecedentes de investigación	28
1.6. Objetivos de investigación	
1.6.1. Objetivo General	38
1.6.2. Objetivos Parciales	38

## CAPÍTULO II

### 2. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES CON RESPECTO A LOS TÉRMINOS *AZAR, ALEATORIEDAD Y PROBABILIDAD*

2.1. Introducción	39
2.2. Azar	40
2.3. Aleatoriedad	44
2.4. Probabilidad	48

## CAPÍTULO III

### 3. INTERPRETACIÓN DE LOS TEXTOS DE LOS ESTUDIANTES

3.1. Introducción	60
3.2. Acerca del Azar	62
3.3. Acerca de la Aleatoriedad	78
3.4. Acerca de la Probabilidad	84

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	101
--------------------------------	-----

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114
----------------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA	119
--------------	-----

ANEXO 1. Instrumento para la solicitud de manifestaciones escriturales.	121
---	-----

ANEXO 2. Azar, Aleatoriedad y Probabilidad: Los textos de los Estudiantes.	122
--	-----

ANEXO 3. Esquemas acerca de aspectos epistémicos de los términos <i>Azar, Aleatoriedad y Probabilidad</i> .	141
---	-----

## LISTA DE TABLAS

**Tabla 1.**

*Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria.* 33

**Tabla 2.**

*Dualidades entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas.* 35

**Tabla 3.**

*Manifestaciones escriturales de los estudiantes.* 123

## LISTA DE ESQUEMAS

**Esquema 1.**

*Aspectos epistémicos del término Azar.* 141

**Esquema 2.**

*Aspectos epistémicos del término Aleatoriedad.* 142

**Esquema 3.**

*Aspectos epistémicos del término Probabilidad.* 142

## INTRODUCCIÓN

*Hay épocas en que el hombre racional y el hombre intuitivo andan juntos, uno angustiado ante la intuición, el otro burlándose de la abstracción; tan irracional el último como poco artista el primero. Ambos ansían dominar la vida: éste, sabiendo tratar las principales necesidades con previsión, prudencia y regularidad; en tanto aquél, como "héroe platónico de alegría", no ve esas necesidades y toma como real sólo la vida que se ajusta a la apariencia y la belleza.*

(Nietzsche, 2009)

En este informe de investigación se presenta un trabajo de carácter analítico-hermenéutico, vinculado con la interpretación de significados en el lenguaje escrito por estudiantes de Educación Media, fundamentado en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, en particular, en la rama de la Didáctica de la Probabilidad. Específicamente, se recurre a fundamentos de filosofía hermenéutica con la pretensión de identificar los significados personales en estudiantes con respecto a los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*, interpretando las expresiones o textos referidos a ellos, en relación con los significados institucionales de los mismos.

La estructura general de este texto consta de tres capítulos. En el primero, se abordan los referentes teóricos que generan y contextualizan el problema, así como determinados antecedentes investigativos y los objetivos de trabajo. Particularmente, se busca comprender elementos del significado de objetos matemáticos y determinar una forma de interpretarlos a partir de manifestaciones escriturales. En definitiva, se logra establecer posibilidades teóricas para vincular concepciones acerca del lenguaje, en didáctica de la matemática, e ideas y formas interpretativas en hermenéutica filosófica.

En el segundo capítulo, se presenta un estudio epistemológico con respecto a los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*. Se realiza un seguimiento del significado y de los conocimientos concernientes a estos tres vocablos en la Institución Matemática, que establece relaciones con otros campos del saber.

La identificación de los significados personales de los estudiantes acerca de los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad* se realiza en el tercer capítulo, de acuerdo con la interpretación de sus expresiones o textos escritos. También se relacionan, interpretativamente, algunos significados personales con los significados institucionales.

Hacia el final de este informe se presentan las conclusiones y recomendaciones surgidas de este trabajo investigativo. Además, se anexan el instrumento a través del cual se solicitaron, de manera particular, las manifestaciones escriturales a los jóvenes escritores partícipes de esta investigación y los textos realizados por ellos. Éstos se presentan de la manera en que fueron escritos por sus autores, salvo algunas modificaciones necesarias.

# **CAPÍTULO I**

## **1. REFERENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

### **1.1.INTRODUCCIÓN**

Como se señala en los documentos rectores del área de matemáticas en Colombia, Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2003), una tendencia actual en muchos currículos de matemáticas en el mundo es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio en todos los niveles educativos. De acuerdo al documento de los Estándares Básicos de Competencias, este pensamiento, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad debido a la falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a suceder. Permite buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, afrontándolos con espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos.

De acuerdo con Shanghnessy, 1985 (citado por MEN, 1998:47), el desarrollo del pensamiento aleatorio, a través de los contenidos de la estadística y la probabilidad, debe realizarse mediante un espíritu de exploración e investigación, tanto por parte de los estudiantes como de los docentes, amparándose en la comparación y evaluación de diversas formas de aproximación a situaciones - problema, con la intención de monitorear posibles concepciones y

representaciones erradas. El trabajo con la probabilidad, en particular, puede darse por la asignación de valores numéricos a diferentes sucesos, mediante definiciones formales, reglas de cálculo o funciones matemáticas, no refleja la naturaleza específica de la aleatoriedad; más allá, se necesita de un marco de significación que favorezca la comprensión del carácter aleatorio de esos valores. Las situaciones reales, cotidianas para los estudiantes, deben permitirles captar tanto la forma cualitativa como cuantitativa de la aleatoriedad.

Los documentos rectores también resaltan la importancia de la comunicación en el proceso educativo en matemáticas. Según The National Council of Teachers of Mathematics, 1989 (citado por MEN, 1998), la comunicación es fundamental para ayudar a los estudiantes a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; es necesario que los estudiantes estén pasando constantemente del lenguaje de la vida diaria al lenguaje de las matemáticas.

De acuerdo con autores como Pimm (1987), Rothery (1980) y Dickson et ál. (1991), algunas de las dificultades en la construcción del conocimiento matemático tienen que ver con los contextos de uso de diferentes palabras. Pueden distinguirse tres categorías amplias: De un lado, están las palabras que son específicas de las matemáticas; de otro, hay palabras que se usan en matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque con distinto significado y, finalmente, se tienen palabras que tienen significados iguales o muy próximos. La mayoría de los términos y expresiones utilizados en la enseñanza de la probabilidad pertenecen a las últimas dos categorías pero, si el estudiante no está muy familiarizado por el uso, muchas palabras de la tercera categoría podrían pasar a la segunda categoría, lo que podría causar dificultades en el aula.

Siguiendo a Ortiz y Serrano (2001) ,en el estudio de la probabilidad el estudiante ha usado con frecuencia términos y expresiones para referirse a los sucesos aleatorios que ,con frecuencia, no tienen el mismo sentido preciso que

adquieren en el tratamiento que se da al azar en la clase de matemáticas. Las diferencias existentes entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje probabilístico pueden ser un obstáculo para la construcción del conocimiento, de manera que lo que resulta problemático no son los términos ni expresiones en sí mismos, sino los conceptos y procesos subyacentes que se están comunicando y el significado que transmiten.

De acuerdo con Batanero y Serrano (1999), citados por Serradó et ál. (2005), la idea de aleatoriedad se introduce preferentemente de un modo descriptivo en la educación escolar, resultando fundamental el papel del lenguaje utilizado para comunicar los significados. La falta de claridad acerca de lo que los términos y expresiones relacionados con la aleatoriedad y la probabilidad significan, deja abierta la posibilidad de interpretación ambigua, lo cual se constituye en un obstáculo fundamental para la construcción de los significados matemáticos.

A la vista de las posibles dificultades relacionadas con el uso y la atribución de diferentes significados a términos utilizados en la clase de matemáticas, para el estudio del pensamiento aleatorio, se considera necesario estudiar, con mayor profundidad, aquellos que los educandos atribuyen a determinados términos que son fundamentales en la enseñanza y el aprendizajes de este pensamiento, tales como *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*. Este es el fin general de esta investigación, cuya consecución se abordará en una doble vertiente teórica y práctica: De una parte, es necesario establecer los significados matemáticos de los términos estudiados, lo cual se puede lograr con un estudio histórico-epistémico y, de otra parte, se propone la tarea de establecer las manifestaciones significativas que los estudiantes refieren a esos mismos términos, a través de una interpretación hermenéutica. Resulta también interesante poder establecer relaciones entre los significados interpretados en los estudiantes y los establecidos institucionalmente en la matemática.

## 1.2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

*Sé por experiencia propia, y por haber hablado con otros analistas expertos, que en ocasiones hay magia en el trabajo: que primero tengo una intelección y la rastreo retrospectivamente, para verificarla o refutarla a partir de los datos, y no que me llega "por medio de ellos". Así empecé a especular sobre las relaciones de la experiencia, la destreza y la magia de la investigación cualitativa. (...) Pasar de la intuición a la intelección, de una pregunta interesante pero sutil a una revelación importante, es un proceso que no está gobernado por el azar.*

(May, 2003)

Los estudiantes de Educación Media, al realizar el estudio de la probabilidad, pueden haber adquirido significados de términos y expresiones referentes a los sucesos aleatorios, tales como Azar, Aleatoriedad y Probabilidad. Estos, con frecuencia, no se corresponden con el sentido que adquieren en la clase de matemáticas, los cuales deberían corresponder con los institucionales (Ortiz et ál., 2001). Las semejanzas y diferencias entre las concepciones personales y las institucionales son un asunto importante al afrontar el estudio de la probabilidad. El reconocimiento de estas relaciones, al iniciar su estudio, permitiría, por una parte, detectar las diferencias entre los sentidos asignados al lenguaje de la aleatoriedad y la probabilidad por los estudiantes y aquellos institucionalizados y, por otra, permitiría diseñar estrategias de enseñanza y aprendizaje de los conceptos y procedimientos probabilísticos. La no determinación de estas diferencias podría constituir un obstáculo para la construcción del conocimiento (Serradó et ál., 2005).

El proceso comunicativo es de vital importancia en la didáctica, de tal manera que se pueden presentar dificultades o problemas de comunicación entre los participantes del hecho educativo, debido a la pluralidad de significados que puedan presentar las diferentes palabras o expresiones (Orton, 2003). Por una parte, los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad* presentan diversos sentidos

y connotaciones, en su continuo uso cotidiano; de otra parte, exhiben muchas acepciones en los diferentes textos que puedan consultarse acerca de ellos; además, en matemáticas, tampoco tienen una significación unívoca. Frente a esta situación de polisemia, en el uso de estos vocablos, se considera necesario adelantar estudios que puedan contribuir al entendimiento y la comprensión comunicativa entre los participantes del proceso educativo y facilitar las acciones de enseñanza y aprendizaje de los significados institucionales de los términos.

En este trabajo de investigación se propone identificar, interpretativamente, los significados personales de estudiantes de Educación Media con respecto a los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad* relacionándolos con los significados matemáticos de la comunidad científica; de tal manera que *“lo que resulta problemático no son los términos (...) en sí mismos, sino los conceptos y procesos subyacentes que están comunicando y el significado que transmiten”* (Serradó et ál., 2005).

*¿Cuáles son los significados personales en estudiantes de Educación Media con respecto a los términos Azar, Aleatoriedad y Probabilidad? Y, además, ¿Cómo se relacionan estos significados con los significados institucionales de la matemática?*

### **1.3. REFERENTES TEÓRICOS DEL PROBLEMA**

#### **1.3.1. INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD**

Este estudio tiene en cuenta elementos teóricos del campo de investigación de la Didáctica de la Probabilidad, campo de estudio que a continuación se caracteriza.

De acuerdo con Brousseau (1991:1), bajo el nombre de “didáctica” se comprende *“un intento de construcción de una ciencia de la comunicación de los conocimientos y de sus transformaciones; una epistemología experimental que se propone teorizar la producción y la circulación de los saberes”*. Esta ciencia se interesa por el papel que el pensamiento tiene con respecto a los problemas y necesidades de los hombres que viven en una sociedad y por las operaciones esenciales de su difusión. Las condiciones de esta propagación y las transformaciones que produce, tanto sobre las ideas como sobre quienes acceden a ellas, sobre las instituciones y las actividades que tienen como objeto facilitar esas acciones.

La Didáctica de las Matemáticas, según Godino y Batanero (1994), estudia los aspectos teórico-conceptuales y de resolución de problemas en los procesos de enseñanza/aprendizaje de los saberes, buscando la caracterización de los factores que condicionan estos procesos. Para lograr este objetivo, este campo del conocimiento debe considerar los aportes de diversas disciplinas como la pedagogía, la psicología, la sociología o la filosofía. Además, debe basarse en el análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, su desarrollo cultural, particularmente, en el seno de las instituciones escolares.

La Didáctica de la Probabilidad se preocupa entonces por el estudio de los procesos de enseñanza/aprendizaje de este campo de conocimiento. *“La probabilidad es una rama de la matemática que se encarga de conocer algo muy difícil de conocer: el azar y los fenómenos aleatorios”* (Alatorre, 1998). El desarrollo formal del cálculo de probabilidades, aún siendo una rama joven de la investigación, estuvo ligada a un gran número de paradojas, lo que indica la disparidad existente entre la intuición en este campo y el desarrollo de algunos conceptos (Borovcnik et ál., 1991, citado por Godino, et ál., 2003).

A pesar de que Kolmogorov publicó en 1933 una axiomática formalmente satisfactoria, prosiguen las controversias sobre la interpretación de conceptos

básicos, aún el de *probabilidad*. El cálculo formal no plantea contradicciones. Los problemas que la axiomatización no ha resuelto se refieren a la naturaleza de los objetos que se representan por medio de la probabilidad. Borovicnik y Peard, 1996 (citados por Godino, J. et ál., 2003) indican que, incluso en conceptos muy elementales, existen resultados contraintuitivos, mientras que en otras ramas de la matemática estos no se encuentran hasta que se llega a un alto grado de abstracción. Por ejemplo, el hecho de que al lanzar una moneda se haya obtenido una racha de cuatro caras seguidas y no se afecte la probabilidad de que al siguiente lanzamiento salga una cara, es contrario a la intuición.

Otra característica señalada por estos autores es la diferencia entre los modos de razonamiento lógico y causal y el tipo de razonamiento probabilístico. El razonamiento lógico de mayor trabajo con los estudiantes es bivalente; una proposición es siempre verdadera o falsa. Mientras que una proposición sobre un suceso aleatorio sólo es cierta o falsa cuando se ha realizado el experimento. Con anterioridad, sólo se puede pensar en las diferentes posibilidades y hablar de la probabilidad del suceso, lo que requiere tener un modelo del espacio muestral del experimento que, por otro lado, no siempre es posible verificar como adecuado.

La estocástica, considerada como la unión entre la probabilidad y la estadística, es asumida como un campo interdisciplinario,

*ya que los mismos conceptos se usan en diferentes materias, donde se suponen aprendidos, para profundizar en los problemas de cuantificación de estas disciplinas, y en donde pueden adjudicárseles significados específicos o simplemente inapropiados. Sin embargo, la enseñanza formal de la estadística y la probabilidad tiene lugar en el aula de matemáticas, y los profesores suelen adaptar su visión sobre la estocástica, y el modo en que ha de ser enseñada, a los métodos de solución y patrones de razonamiento de otras ramas de la matemática. Es notable también la estructura compleja y sistémica de los conceptos estocásticos, incluso aparentemente simples y la interrelación entre componentes matemáticos y aspectos concretos en que se aplican (Godino, J. et ál., 2003).*

Para abordar el estudio en el campo de la Didáctica de la Probabilidad, se considera necesario tener en cuenta lo que algunos investigadores denominan 'conocimiento didáctico' (Aichele, D. y Coxford, A., 1994, citados por Batanero, C. et ál., 2004), el cual incluye reflexión epistemológica sobre el significado de los conceptos probabilísticos, capacidad crítica para analizar libros de texto y documentos curriculares, previsiones sobre dificultades, errores, obstáculos y estrategias en la resolución de problemas, experiencia con situaciones adecuadas de enseñanza, herramientas y materiales didácticos y capacidad para desarrollar y analizar pruebas e instrumentos de evaluación, como también, para interpretar las respuestas de los estudiantes a los mismos.

### **1.3.2. EL SIGNIFICADO DE OBJETOS MATEMÁTICOS: SU IMPORTANCIA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

En esta investigación, el significado de los objetos se constituye como una noción fundamental, por lo cual se considera necesario tener una conciencia clara de lo referenciado por este término. La noción de 'significado' representa un interés importante en la Didáctica de la matemática, en particular, en lo relacionado con la determinación del significado que los estudiantes atribuyen a los términos y símbolos, a los conceptos y proposiciones, así como a la construcción de estos significados como consecuencia del proceso educativo (Godino y Batanero, 1994).

Algunos autores se han referido al papel fundamental del 'significado' en Didáctica de la Matemática. Balacheff, (1990), citado por Godino y Batanero, (1994) afirma que *"un problema pertenece a una problemática de investigación sobre la enseñanza de la matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en la clase de matemáticas"* y plantea cuestiones centrales para la Didáctica de la Matemática,

tales como: ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos se pueden inferir a partir de una observación de su conducta?, ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas?, ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y del conocimiento matemático elegido como referencia?, ¿Cómo se pueden caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?.

Sierpinska (1990), citado por Godino y Batanero, (1994) relaciona el significado con la comprensión,

*comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión.*

Dummett (1991), citado por Godino y Batanero, (1994) relaciona, así mismo, el significado y la comprensión, desde una perspectiva más general, proponiendo que

*una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es aquello de que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje.*

Siguiendo a Godino y Batanero (1994), en la investigación en Didáctica de la Matemática, la preocupación por el significado de los términos y conceptos debe ir acompañada por la indagación sobre la naturaleza de sus objetos, por la reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento y su mutua interdependencia. En sentido recíproco, tras de toda teoría, sobre la formación de conceptos, hay unos presupuestos epistemológicos sobre la naturaleza de los mismos y, por tanto, una teoría más o menos explícita del significado.

Para contribuir con la investigación en Didáctica de la matemática, Godino y Batanero (1994), proponen elementos teóricos de la significación desde diferentes campos del conocimiento. Para ello, proponen un uso más técnico y restringido de los términos 'objeto' y 'significado'.

### **1.3.3. OBJETOS Y SIGNIFICADOS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

A continuación se precisan los términos objeto y significado, siguiendo a Godino y Batanero (1994), quienes proponen un uso técnico para la noción de 'significado' que sea de utilidad en los estudios didácticos. También realizan una diferenciación entre objeto institucional, base del conocimiento objetivo, y objeto personal (o mental), cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo. Es necesario destacar que los objetos que intervienen en las situaciones que estudian los matemáticos y los que emergen de las mismas, así como las relaciones entre ellos, están organizados en torno de una finalidad: adoptar decisiones, actuar, resolver situaciones problemáticas o ciertas disposiciones del entorno (Godino y Batanero, 1994:6-7).

Se parte, entonces, de la formulación de una ontología de los objetos, teniendo en cuenta el triple aspecto de la matemática, como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado.

Se denomina práctica a toda actuación o manifestación, lingüística o no, realizada por alguien. Los objetos materiales o abstractos que intervienen en las prácticas matemáticas pueden estar representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Las prácticas personales pueden ser actuaciones observables, esto es, manifestaciones empíricas o, también, acciones interiorizadas no observables directamente. Por ello, el lenguaje es el mediador

que posibilita la movilización del pensamiento hacia la construcción del conocimiento. El análisis semiótico realizado por Rotman (1988), citado por Godino y Batanero, (1994) apoya también la íntima interdependencia entre el pensamiento y el lenguaje matemático: *"Los números son objetos que resultan de una amalgama de dos actividades, pensar (imaginar acciones) y simbolizar (hacer marcas), las cuales son inseparables: los matemáticos piensan sobre marcas que ellos mismos han imaginado en una existencia potencial"*

Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, así mismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. La institución matemática está constituida por las personas que, en el seno de la sociedad, están comprometidas en la resolución de nuevos problemas. Son productores del "saber matemático". Los "utilizadores" de este saber (matemáticos aplicados) y los "enseñantes" (la escuela), constituyen otras instituciones (macro-instituciones) involucradas con "situaciones matemáticas".

Un sistema de prácticas institucionales está constituido por las experiencias consideradas como significativas para resolver un campo de problemas, que son compartidas en el seno de la institución y son observables por su carácter social. Descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y procedimientos que son invariantes, son algunos ejemplos.

Para definir 'objeto institucional' y 'objeto personal' se utiliza la noción de 'emergencia'. De acuerdo con Morin (1977), citado por Godino y Batanero (1994), ésta significa que los productos globales de las actividades, que forman un sistema, disponen de cualidades propias, que retroactúan sobre las acciones mismas del sistema del que se vuelven inseparables. Cualquiera de estos resultados se denomina 'emergente'.

Un objeto institucional es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas. Si la institución es la matemática, el objeto recibirá el nombre de 'objeto matemático'. Por ejemplo, puede ser un concepto, una proposición, una teoría, entre otros.

Un sistema de prácticas personales está constituido por las acciones prototípicas que un individuo realiza en su intento de resolver un campo de problemas. De tal manera que un objeto personal es un emergente de este sistema y constituye el conocimiento subjetivo. La emergencia es progresiva, a través de la historia del sujeto, dada su experiencia y aprendizaje.

Vergnaud (1990), citado por Godino y Batanero (1994), considera que el significado de un objeto matemático, desde un punto de vista didáctico, no puede quedar reducido a una mera descripción definitoria.

*Un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza". "Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo.*

El significado de los objetos matemáticos debe referirse a la acción, interiorizada o no, que realiza un sujeto en relación con ellos. Además, es necesario diferenciar una dimensión personal e institucional de éste. El significado de un objeto institucional es el sistema de prácticas, asociadas al campo de problemas de las que emerge, en un momento dado. Se trata de un constructo relativo y dependiente estocásticamente del tiempo. Si la institución es la matemática, se habla del significado matemático del objeto. *"Esta noción de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional"* (Godino y Batanero, 1994).

El significado de un objeto personal es el sistema de prácticas de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge, en un momento dado. Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente. Una parte del significado es observable, aunque no lo son directamente las prácticas constituidas por acciones interiorizadas.

La clase de matemáticas es considerada como una institución particular en la Didáctica, en la cual el maestro debe facilitar al estudiante un entorno de aprendizaje que tenga en cuenta los lineamientos curriculares, los libros de texto y el uso de materiales (considerados como instituciones portadoras de aspectos parciales del significado de los objetos correspondientes). Las escogencias que realice un maestro, con respecto a un objeto, se traducen en una concepción restringida del mismo. Ahora, al evaluar el aprendizaje, lo que hace el educador es confrontar esta idea que se trata de enseñar con la efectivamente aprendida.

Se puede decir, entonces, que de un mismo campo de problemas, que en una institución ha dado lugar a un objeto con significado institucional, en una persona puede dar lugar a un objeto con significado personal. La intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que, desde el punto de vista de la comunidad científica, se considera manifestaciones correctas; ésto es, lo que el individuo "conoce" o "comprende" del objeto. El resto de prácticas personales serían consideradas "erróneas". Aún así, la comprensión alcanzada por un sujeto, en un momento dado, difícilmente sería total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles (Godino y Batanero, 1994).

En esta investigación, se indaga por los significados institucionales matemáticos de los objetos referenciados por los términos Azar, Aleatoriedad y Probabilidad, los cuales pueden establecerse a través de un estudio epistemológico que indague por el conocimiento, en general, y los conceptos, en particular, alrededor de estos términos.

Con respecto a los significados personales de los sujetos, en relación a los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*, se propone establecer unos referentes teóricos que permitan su interpretación. En primera instancia, se considera a Glasersfeld (1989), citado por Godino y Batanero (1994), cuando afirma que:

*el proceso de acomodación y ajuste del significado de las palabras y expresiones lingüísticas continúa de hecho para cada uno de nosotros a lo largo de nuestras vidas. No importa durante cuánto tiempo he hablado una lengua, habrá aún la ocasión en que nos demos cuenta de que, hasta cierto punto, hemos estado usando una palabra de tal modo que ahora resulta ser idiosincrásica en algún aspecto particular.*

#### **1.3.4. EL SIGNIFICADO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS Y EL USO LINGÜÍSTICO**

Siguiendo a Kutschera (1979), citado por Godino y Batanero (1994), las teorías del significado pueden agruparse en dos categorías: realistas y pragmáticas. En las primeras, al asignar un objeto, un concepto o una proposición a una palabra, esta se hace significativa, adquiere significado. De tal manera que habría entidades, no necesariamente concretas, aunque siempre objetivamente dadas con anterioridad a los vocablos, que son sus significados. *"Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática"* (Kutschera, 1979:34, citado por Godino y Batanero, 1994).

En lo que respecta a la segunda categoría, las ideas básicas se refieren a que el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan y niegan la posibilidad de una observación científica, empírica e intersubjetiva de las entidades abstractas -como conceptos o proposiciones- que

tácitamente es admitida en las teorías realistas. El lugar desde donde debe partir una investigación del lenguaje es del uso lingüístico, ya que es lo único accesible a la observación en estos casos. El significado de los objetos abstractos se debe inferir a partir del uso de los términos que los refieren. Desde un punto de vista epistemológico, esta concepción del significado

*es mucho más satisfactoria que la teoría figurativa realista: al desaparecer los conceptos y proposiciones como datos independientes de la lengua, se disipa también el problema de cómo pueden ser conocidas esas entidades, y nos acercamos a los fenómenos que justifican la dependencia del pensamiento y de la experiencia respecto del lenguaje (Kutschera, 1979:148, citado por Godino y Batanero, 1994).*

Una interpretación de los supuestos ontológicos de la semántica realista, en la Matemática, se relaciona con una visión platónica de los objetos (conceptos, proposiciones, teorías, entre otros). Las nociones y estructuras tienen una existencia real en algún dominio ideal, independiente de los seres humanos, de acuerdo con esta posición filosófica. El conocimiento consiste en descubrir las relaciones preexistentes que conectan a los objetos. *“Esta concepción implica, además, una visión absolutista del conocimiento matemático, en el sentido de que éste es considerado como un sistema de verdades seguras e inmutables”* (Godino y Batanero, 1994:5). Desde estos supuestos, el significado del término "probabilidad", por ejemplo, sería simplemente el concepto del mismo, dado por una definición matemática.

De acuerdo con las teorías pragmáticas, el significado de los objetos matemáticos, considerados como unidades culturales emergentes de un sistema de usos, en relación con las actividades que realiza un grupo de personas y que evolucionan con el tiempo, está íntimamente ligado con esos usos.

*En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y el que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática (Godino y Batanero, 1994: 5).*

En esta investigación, se adopta una visión pragmática del significado de los términos *Azar, Aleatoriedad y Probabilidad*. De tal manera, que cada término se hace significativo por el hecho de desempeñar una determinada función a través de su uso lingüístico y de ser usado de una manera determinada y con una finalidad. De acuerdo con Wittgenstein (1988), el significado de las palabras y el sentido de las expresiones está en su función, su uso en el lenguaje; puede decirse que preguntar por el significado de una palabra o por el sentido de una expresión equivale a preguntar cómo se usa.

Por consiguiente, al plantear en la descripción del problema de investigación la necesidad de identificar los significados personales, con los cuales arriban los estudiantes a la clase de matemáticas, se asume la posibilidad de que ellos mismos usen los términos en cuestión, planteando si pueden identificarlos, si pueden realizar narraciones y si pueden establecer situaciones problemáticas en relación a ellos. El interés estriba en, de acuerdo con Vergnaud (1990), citado por Godino y Batanero (1994), y como se vio en el aparte anterior, no simplemente en cuestionar la definición de un concepto: ¿Cómo definirías el azar, la aleatoriedad y la probabilidad? Más bien, se trata de que los jóvenes establezcan las situaciones que dan significado a los conceptos matemáticos. De tal manera, que el sentido no esté en las situaciones ni en representaciones simbólicas, sino en la relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. Que sean los esquemas evocados por el sujeto individual lo que constituya, interpretativamente para el investigador, el significado de esta situación o de este significante para el individuo.

De esta forma, no se trata de que los investigadores planteen problemas para que los estudiantes resuelvan o situaciones para que tomen decisiones (lo cual puede resultar bastante significativo en situaciones didácticas en las que el maestro realice “vigilancia epistemológica”, en el sentido de Chevallard\*, 1991). No

---

\* Se refiere a la atenta mirada que debe haber respecto a la brecha existente entre el saber institucional y el saber construido gracias a la enseñanza.

está, por demás, decir que este trabajo de investigación puede constituirse en un insumo fundamental para el diseño posterior de los problemas y las situaciones para la toma de decisiones que puedan plantearse a los educandos en la actividad didáctica en el sentido de que establece un *estado inicial* de los educandos frente al conocimiento.

#### **1.4. CONCEPCIONES DE FILOSOFÍA HERMENÉUTICA PARA LA INTERPRETACIÓN DE SIGNIFICADOS PERSONALES EN TEXTOS ESCRITOS**

*El proceso de investigar de manera cualitativa presenta un reto, porque los procedimientos para organizar las imágenes no están bien definidos y se basan en procesos de inferencia, comprensión, lógica y suerte y, al cabo de tiempo, con creatividad y trabajo duro, los resultados emergen como un todo coherente.*

(Morse, 2003a)

La caracterización de los significados personales de los sujetos participantes de esta investigación parte, entonces, del uso que ellos realicen de los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*. Este uso lingüístico puede manifestarse a través de textos escritos, los cuales, se propone, sean interpretados bajo concepciones propias de la filosofía hermenéutica.

Inicialmente, se recurre a la idea de 'texto' en el filósofo francés Paul Ricoeur. Según este autor

*llamamos texto a todo discurso fijado por la escritura... podemos decir que lo que llega a la escritura es el discurso en tanto intención de decir, y que la escritura es una inscripción directa de esta intención, aun cuando, histórica y psicológicamente, la escritura comenzó por transcribir gráficamente los signos del habla. Esta liberación de la escritura que la pone en el lugar del habla es el acto del nacimiento del texto (Ricoeur, 2002: 127-129).*

De tal manera que el texto escrito conserva el discurso y lo convierte en una fuente utilizable por la memoria individual y colectiva. Los símbolos permiten una traducción analítica y distintiva de los rasgos sucesivos y discretos del lenguaje, aumentando su eficacia. Pero también provoca una modificación en las relaciones entre lenguaje y mundo, entre lenguaje y subjetividad -la del autor y la del lector-. *“El texto tiene referencia; ésta será precisamente la tarea de la lectura como interpretación: efectuar la referencia”* (Ricoeur, 2002:130). Ésta se haya diferida; el texto se encuentra como *en el aire*, sin mundo o fuera del mundo. Pero, gracias a esta relación con el mundo, puede entrar en relación con cualquier otro texto que venga a tomar el lugar de la realidad circunstancial, generándose, lo que Ricoeur ha llamado el cuasimundo de los textos o *literatura*, el lugar donde las palabras escritas devienen palabras en sí mismas.

La relación del texto con las subjetividades del autor y del lector es fundamental, ya que en aquel no hay locutor, en el sentido de una inmediata y directa autodesignación del que habla. De esta relación compleja puede decirse que el autor es instituido por el texto, de tal manera que *“él mismo se sostiene en el espacio del significado trazado e inscrito por la escritura. El texto es el lugar mismo donde el autor adviene”* (Ricoeur, 2002: 131). Éste está puesto a distancia por su propio escrito...Tal vez, aquel llega a éste como primer lector.

Cuando el lector está frente al texto, libre éste de su mundo y de su autor, puede pretender dos actitudes. Al estar la referencia diferida, el lector puede prolongarla y acentuarla; es la actitud explicativa. O, en otro caso, puede levantar la suspensión y propender por la búsqueda del significado, de la comprensión; es la actitud interpretativa.

*La lectura es posible porque el texto no está cerrado en sí mismo, sino abierto hacia otra cosa; leer es, en toda hipótesis, articular un discurso nuevo al discurso del texto. Esta articulación de un discurso con un discurso denuncia, en la constitución misma del texto, una capacidad original de continuación, que es su carácter abierto. La interpretación es el cumplimiento concreto de esta articulación y de esta continuación* (Ricoeur, 2002:140).

La interpretación es una actitud frente al texto, en la que la apropiación y la búsqueda de significado se acaban en la interpretación de sí, de un sujeto que, desde entonces, se comprende de otra manera, lo hace mejor, o, incluso, comienza a comprenderse. En ningún caso, ella es ingenua o inmediata, la apropiación requiere de una lucha contra la distancia cultural, contra el alejamiento del sentido mismo. Se busca hacer propio lo que, en principio, era extraño; es su carácter actual, la actualización de las posibilidades semánticas. *“En síntesis, en la reflexión hermenéutica -o en la hermenéutica reflexiva- la constitución del sí mismo y la del sentido son contemporáneas”* (Ricoeur, 2002:141).

Para realizar una interpretación el lector debe reconocer que *“las oraciones del texto significan hic et nunc. El texto tenía sólo un sentido, es decir, relaciones internas, una estructura; ahora tiene un significado, es decir, una relación en el discurso propio del sujeto que lee”* (Ricoeur, 2002:142). La interpretación se realiza mediante el lenguaje, no sobre él. En el acto están presentes el intérprete (de enunciados), el objeto, los signos (semántica profunda destacada por el análisis estructural) y la interpretación (cadena producida por la comunidad e incorporada a la dinámica del texto, como el trabajo del sentido sobre sí mismo. En ella, los primeros sirven de tradición para los últimos, que es la interpretación propiamente dicha.)

Ahora, el texto debe ser interpretado ya que no se compone simplemente de una sucesión arbitraria de oraciones, ni cada una de ellas lleva a la comprensión por separado. Es algo diferente, *“un texto es algo más que una secuencia lineal de oraciones; es un proceso acumulativo y holístico”* (Ricoeur, 2002:184). De tal manera que la plurivocidad de significado que se confiere va más allá de la polisemia de las palabras o expresiones individuales; se refiere a las múltiples lecturas o interpretaciones que pueden realizarse de él considerado como totalidad.

Hay que tener presente que toda interpretación realizada sobre un texto se presenta en primera instancia como una conjetura que demanda validación (más que verificación). *“Los procedimientos de validación de nuestras conjeturas, sostengo como Hirsch, que se aproximan más a una lógica de la probabilidad que a una lógica de la verificación empírica”* (Ricoeur, 2002:186). De forma que se establece una relación circular entre la conjetura y la validación, entre un aspecto subjetivo y uno objetivo de la referencia. Debe buscarse, por tanto, que una interpretación no sólo sea probable sino más probable que alguna otra; así que, si bien es cierto que puede haber más de una, no es correcto pensar que todas ellas tengan la misma validez, al punto que *“un texto es un campo limitado de interpretaciones posibles”* (Ricoeur, 2002:187).

Con respecto a la referencia del texto, en la actitud interpretativa, en la que se desea actualizar las referencias potenciales no ostensivas en una nueva situación para el lector,

*lo que queremos comprender no es algo oculto detrás del texto, sino algo expuesto frente a él. Lo que se debe comprender no es la situación inicial del discurso, sino lo que apunta hacia un mundo posible. La comprensión tiene menos relación que nunca con el autor y su situación. Quiere captar las proposiciones del mundo abiertas por las referencias del texto. Comprender un texto es seguir su movimiento del sentido hacia la referencia, de lo que dice a aquello a lo cual se refiere* (Ricoeur, 2002:192).

Cuando los estudiantes, partícipes de esta investigación, usan los términos *Azar, Aleatoriedad y Probabilidad*, escriben textos de diversa índole, éstos se inscriben en el espacio de las interpretaciones, en donde se tiene la intención de indagar los significados de aquellos términos. De esa forma, la interpretación se puede considerar como un re-decir que reactiva el decir del texto. Lo que se quiere interpretar en las referencias a cosas, en los relatos y en las situaciones problemáticas realizadas por los jóvenes escritores no es a quienes lo escribieron, sino aquello de lo que hablan, de las cosas del texto, de los tipos de mundo que estos expanden delante de sí.

Elvia González se refiere a los presupuestos interpretativos de la concepción de texto en Ricoeur, así:

*Todo texto se produce bajo una estructura. Ese texto rompe sus vínculos con su contexto original, se descontextualiza, abandona su época, su entorno, su autor, viaja por el tiempo y por los espacios. Luego llega a un lector, a un proceso de lectura; el lector necesita desentrañar la estructura del texto; es un proceso de explicación de la organización de los signos y símbolos en los diferentes niveles del lenguaje que lo constituyen, lo cual objetiviza la subjetividad del autor. Una vez explicada la estructura del texto, se aborda la comprensión; el lector se apropia del significado desplegado por el texto, a través de la hermenéutica del sí. La comprensión objetiviza la subjetividad del lector, es decir, tanto la explicación como la comprensión son elementos, ambos, de la interpretación; esta interpretación nunca se separa de la praxis. El lector actualiza para sí mismo y para su propio presente el significado del texto, lo recontextualiza y este proceso puede dar origen a un nuevo discurso que puede quedar fijado como otro texto, el cual, a su vez, se vuelve a descontextualizar para posibilitar futuras recontextualizaciones por otros lectores, y así sucesivamente... (González, 2006:35).*

Al recurrir a los fundamentos hermenéuticos expuestos, se puede asumir la hermenéutica como una forma de investigación que contribuye a la creación del conocimiento en literatura. Por lo general, tal aproximación a textos se basa más en la práctica que en la teoría, en la búsqueda legítima de encontrar las formas más apropiadas para ésta o aquella necesidad.

*La investigación hermenéutica se convierte pues en acción en el aula, en investigación en acción, normalmente para saber qué técnica funciona mejor en un determinado contexto y con unos determinados estudiantes. Los profesores no hemos visto en las redacciones de los alumnos más que un conjunto de letras para llenar con correcciones en rojos, sin ver más allá (Sánchez, 2001).*

De acuerdo a los textos que producen los estudiantes, debe haber consciencia de que tras los escritos hay unos escritores escribiendo en una gran variedad de temas, con diversidad de modos y propósitos comunicativos, con sus particulares voces, con determinadas actitudes hacia la sociedad en la que viven, hacia la autoridad, hacia sus lectores, como cualquier otro grupo de autores. Los educandos, tal vez, por no disponer de los instrumentos necesarios para escribir el

mensaje, carezcan de la nitidez que tendrían escritores profesionales, pero dentro de esta inexperiencia, sus manifestaciones escriturales pueden ser examinadas, tanto por un investigador académico como por los mismos jóvenes. Incluso pueden servir de aplicación didáctica en el aula.

Una posible forma de realizar la investigación hermenéutica, de acuerdo con North (1986), citado por Sánchez (2001), trata del establecimiento de un conjunto de textos, su interpretación y la generación de conjeturas probables. Más explícitamente, la investigación puede surgir a partir de un examen de bibliografía y de la identificación de un problema. Luego, se realiza una etapa empírica de identificación de escritos relevantes y de validación. Y, posteriormente, se entra en una etapa interpretativa en la que se da una búsqueda de pautas y la explicación de las mismas: Generación de una interpretación, su relación con otras existentes, para terminar con una diseminación a un amplio número de lectores.

Para finalizar este aparte, se pretende describir, con el filósofo alemán Hans-George Gadamer, parte de las relaciones que pueden establecerse entre el rigor metodológico de la ciencia y el pensamiento hermenéutico filosófico:

*Fue desde luego un tosco malentendido el que se acusase al lema 'verdad y método' de estar ignorando el rigor metodológico de la ciencia moderna. Lo que da vigencia a la hermenéutica es algo muy distinto y que no plantea la menor tensión con el ethos más estricto de la ciencia. Ningún investigador productivo puede dudar en el fondo de que la limpieza metodológica es, sin duda, ineludible en la ciencia, pero que la aplicación de los métodos habituales es menos constitutiva de la esencia de cualquier investigación que el hallazgo de otros nuevos –y por detrás de ellos, la fantasía creadora del investigador-. Y esto no concierne sólo al ámbito de las llamadas ciencias del espíritu... la reflexión hermenéutica que se plantea en verdad y método es cualquier cosa menos un simple juego de conceptos. En todo momento procede de la praxis concreta de las ciencias, y en éstas la reflexión sobre el método es cualquier cosa menos un simple juego de conceptos. En todo momento procede de la praxis concreta de las ciencias, y en éstas, la reflexión sobre el método, esto es, el procedimiento controlable y la falsabilidad, es algo completamente natural. Por otra parte, esta reflexión hermenéutica se ha avalado en todas partes en la práctica de la ciencia (Gadamer, 1977).*

## 1.5. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

*La teoría que se obtiene de la literatura es una plantilla para comparar, de modo que el investigador pueda reconocer qué es nuevo y emocionante cuando descubre algo nuevo y emocionante, y reconozca de manera instantánea cuando vea algo conocido.*

(Morse, 2003b)

En la *Revista de Didáctica de la Matemáticas No. 44*, Batanero et ál. (2007), publican un breve resumen sobre el estado actual de la investigación en didáctica de la probabilidad. Se hace referencia a investigaciones en la línea del desarrollo cognitivo, como la realizada por Piaget e Inhelder, en 1951, acerca del análisis de las etapas de adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, el razonamiento combinatorio, la distribución y la convergencia, así como la capacidad de cuantificación en niños y adolescentes.

Con el fin de poder generar algunas posibles hipótesis acerca del desarrollo del pensamiento estocástico que estudiantes, participantes de esta investigación, hayan logrado, jóvenes de Educación Media, cuyas edades oscilan entre los 14 y 17 años, se recurre a Piaget e Inhelder (1972). Según estos autores, al pensamiento formal le interesan los problemas de lo casual en relación a *lo posible*, no sólo a lo real, de manera que pueda el sujeto diferenciar entre lo deducible y lo fortuito. Consideran la obtención de la idea de azar como complementaria a la de la relación causa-efecto. Sin comprensión de la causación, no habría referencia para identificar los fenómenos ligados al albur.

Hasta la etapa de las operaciones concretas (7 a 12 años), en la que hay cierta apreciación de los factores que caracterizan los fenómenos causados, el niño no puede comprender la idea de azar. Además, tanto esta idea, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente comprendida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales (12-14

años). Es decir, que Piaget e Inhelder pensaban que los niños pequeños no pueden comprender bien la casualidad, porque para ello tendrían que entender la relación de causa y efecto y que no hay una intuición del azar innata, como no la albergó tampoco el hombre primitivo, que atribuía los sucesos aleatorios a causas ocultas o a la “voluntad de los dioses”.

Fischbein (1975), al lado de los autores mencionados, ofrece también elementos para caracterizar las etapas del desarrollo del pensamiento aleatorio. En el período preoperacional los escritores concluyen que no existe una intuición del azar innata en el niño, por lo que dirigen sus investigaciones a determinar cómo se desarrolla esta intuición en su mente. Para Piaget e Inhelder, esta comprensión presupone la posesión previa de un esquema lógico-combinatorio, que el niño debe construir. Para Fischbein, una cierta comprensión intuitiva del albur opera sin instrucción previa, estando presente en la conducta diaria de cada infante. Piaget e Inhelder consideran que el niño, en esta etapa, no es capaz de estimar las posibilidades a favor o en contra de los sucesos aleatorios, pero Fischbein piensa que el niño es capaz de hacer juicios probabilísticos en el sentido de que, cuando es posible un control experimental y de operaciones auxiliares de comparación y cálculo simples, puede partir de una estimación intuitiva de posibilidades a favor de algún suceso.

En el período de las operaciones concretas, a través de la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógicos-matemáticos, el niño adquiere la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, incluso a nivel conceptual; pero sólo lo hace desde la representación, que es una intuición primaria. El niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos predecibles y a la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. De acuerdo con Piaget e Inhelder, niños de 9-10 años, que no han recibido una instrucción específica, muestran para el caso de comparación de probabilidades un porcentaje de respuestas acertadas mayor que niños de preescolar y buscan modos de realizar inventarios de todas las permutaciones,

variaciones y combinaciones posibles en un conjunto dado con un número pequeño de elementos, llegando, incluso, a procedimientos rudimentarios de cálculo mediante ensayo y error al final de este periodo (10-11 años); Fischbein ha mostrado que los niños, con ayuda de instrucción, asimilan procedimientos enumerativos usados en la construcción de diagramas de árbol.

Finalmente, en el período de las operaciones formales, para Piaget e Inhelder, el adolescente agrupa las relaciones no determinadas de fenómenos aleatorios según esquemas operacionales. Una vez que se presenta una situación aleatoria, ésta se hace inteligible por medio del uso de estos esquemas y la síntesis entre lo casual y lo operacional conduce al adolescente al concepto de probabilidad. Pero, para Fischbein, la síntesis entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y totalmente al nivel de las operaciones formales; razona que esta deficiencia se ocasiona porque las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas, según las cuales los sucesos aleatorios caen fuera de los límites de lo racional y científico. Para él, la intuición lo fortuito es irreconciliable con una estructura del pensamiento lógico y es relegada a una clase inferior, como un método inadecuado de interpretación que no cumple los requisitos científicos.

En conclusión, para Fischbein, la intuición probabilística no se desenvuelve espontáneamente, excepto dentro de unos límites muy estrechos. La comprensión, interpretación y evaluación de fenómenos probabilísticos no pueden ser confiadas a intuiciones primarias que han sido despreciadas, olvidadas y abandonadas en un estado rudimentario de desarrollo bajo la presión de esquemas operacionales que no pueden articularse con ellas. Por lo tanto, es necesario promover, desde los primeros niveles, la base intuitiva relevante al pensamiento probabilístico. Y de acuerdo a Piaget e Inhelder, por debajo de la etapa de las operaciones formales, los niños no pueden comprender la probabilidad, de donde, no pueden emitir juicios probabilísticos categóricos.

En la línea de la toma de decisiones, se recogen y proponen diferentes trabajos por Kahneman, Slovic y Tversky sobre el razonamiento correlacional, la inferencia, la probabilidad condicional y la regla de Bayes, así como el inicio de los estudios psicológicos sobre la toma de decisiones en situación de incertidumbre.

Investigaciones en la línea de la enseñanza y la resolución de problemas tratan, por ejemplo, de la evaluación del aprendizaje, el uso de ordenadores para la promoción de significados –como en el caso de la distribución normal- el análisis de las concepciones espontáneas sobre conceptos estocásticos avanzados, así como la resistencia de determinadas ideas erróneas y heurísticas tras un cambio conceptual.

En la línea del currículo y la formación de profesores, la revisión de la investigación existente muestra que, aunque la probabilidad hace parte formal del currículo, no siempre se enseña y muchos maestros hacen un énfasis excesivo en la enseñanza de fórmulas, en lugar de trabajar con la resolución de problemas y la experimentación con fenómenos aleatorios; además, los docentes no encuentran el apoyo necesario en muchos de los libros de texto revisados ya que, con frecuencia, éstos presentan una visión sesgada e incompleta del tema. También, en esta línea, se ha indicado la influencia que tienen sobre la enseñanza de la probabilidad las concepciones determinísticas y la falta de formación de los docentes en estos temas, presentándose, incluso en algunos casos, conocimientos erróneos sobre algunos conceptos.

Para tratar de subsanar estas dificultades los investigadores proponen la reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución; el análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlo a las distintas niveles de la enseñanza; el estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los estudiantes en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas que permitan orientar mejor las actividades de enseñanza y evaluación del aprendizaje; el análisis del currículo, las situaciones

didácticas, metodologías de enseñanza de temas concretos y recursos didácticos específicos.

Se resaltan algunas recomendaciones propuestas para la investigación en el campo de la didáctica de la probabilidad: acudir a las recientes teorías del aprendizaje, que resaltan el valor de la interacción social y el discurso en la construcción del conocimiento; observar, simultáneamente, los puntos de vista global y local en la enseñanza, puesto que no debe desconocerse las tendencias generales de las sociedades, como un todo, pero tampoco puede ignorarse el respeto a las minorías, la atención a la diversidad y los aspectos afectivos de los implicados en el proceso educativo.

*La investigación que acabamos de reseñar indica que muchos conceptos fundamentales de probabilidad, incluso los aparentemente elementales, se usan incorrectamente o no se comprenden. Por otro lado, la cultura en probabilidad [Gal, 2005] requiere no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los estudiantes a interesarse por mejorar su conocimiento, incluso finalizado su aprendizaje en la escuela o universidad. Como sugirió Laplace, el aprendizaje de la probabilidad nos ayuda a evitar ilusiones en la toma de decisiones y por ello 'no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación [Laplace, 1986/1825, pp. 206-207]' (Batanero et ál., 2007:9).*

Con respecto a las investigaciones sobre los significados de la probabilidad, en estudiantes de educación no universitaria, se referencia el texto de Batanero (2005), en el que se analizan los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Además, a partir de este marco teórico, se interpretan algunos errores frecuentes al resolver problemas en términos de conflictos semióticos. En la siguiente tabla se presenta un resumen de diferentes significados históricos de la probabilidad, que aún persisten y se usan en la práctica y enseñanza:

**Tabla 1.***Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria.*

<b>SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD</b>	<b>CAMPOS DE PROBLEMAS</b>	<b>ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS</b>	<b>ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS</b>	<b>DEFINICIONES Y PROPIEDADES</b>	<b>ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS</b>
Intuitivo	Sorteos. Adivinación.	Manipulación de generadores de azar: dados, cartas...	Lenguaje ordinario.	Opinión impredecible, creencia.	Suerte. Destino.
Clásica	Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar.	Combinatoria. Proporciones. Análisis a priori de la estructura del experimento.	Triángulo aritmético. Listado de sucesos. Fórmulas combinatorias.	Cociente de casos favorables y posibles. Equiprobabilidad de sucesos simples.	Esperanza. Equitatividad. Independencia
Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones.	Registro de datos estadísticos a posteriori. Ajuste de curvas matemáticas. Análisis matemático. Simulación.	Tablas y gráficos estadísticos. Curvas de densidad. Tablas de números aleatorios. Tablas de distribuciones.	Límite de las frecuencias relativas. Carácter objetivo basado en la evidencia empírica.	Frecuencia relativa. Universo. Variable aleatoria. Distribución de probabilidad.
Subjetiva	Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles.	Teorema de Bayes. Asignación subjetiva de probabilidades.	Expresión de la probabilidad condicional.	Carácter subjetivo. Revisable con la experiencia.	Probabilidad condicional. Distribuciones a priori y a posteriori.
Axiomática	Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos.	Teoría de conjuntos. Álgebra de conjuntos. Teoría de la medida.	Símbolos conjuntistas.	Función medible.	Espacio muestral. Espacio de probabilidad. Conjuntos de Borel.

*Nota. Tomada de Batanero (2005).*

Como conclusiones de su investigación, Batanero propone las siguientes: El significado polifacético de la probabilidad no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, en razón de que están ligadas dialécticamente; la visión clásica, basada en el cálculo combinatorio, dominó el currículo, hasta 1970; las aplicaciones a diferentes ciencias estaban ocultas; muchos profesores vieron la

probabilidad como una parte secundaria de las matemáticas que sólo se interesaba por los juegos de azar, en otros casos, era sólo una aplicación de los teoría de conjuntos; el aumento del interés por la introducción experimental, promovido por el desarrollo progresivo de los ordenadores; el conocimiento genuino de esta rama, sólo alcanzable con el estudio de alguna probabilidad formal, aunque gradual y apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes; la necesidad de investigación, que clarifique cuáles son los componentes fundamentales del significado del término, así como los niveles de abstracción adecuados en que cada componente debe ser enseñado, para ayudar a los estudiantes a superar las posibles dificultades; la importancia de la actividad semiótica de los estudiantes al resolver problemas matemáticos, de modo que se promueva la superación de errores y dificultades.

El No. 10 de la Serie *Cuadernos de Investigación*, publicado por el Instituto de Estudios e Investigaciones Educativas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, está dedicado a la educación estocástica. De esta divulgación se destaca el texto “También existen buenas intuiciones en probabilidad” de Yáñez (2007). El objetivo fundamental de su trabajo consiste en rescatar las buenas intuiciones de los estudiantes, mediante el análisis del desempeño en la resolución de problemas. Como conclusiones de este trabajo se tienen: Definitivamente las voces de los estudiantes tienen mucho que enseñar, no solamente para conocer sus malas intuiciones y/o concepciones, sino también para conocer las buenas y, a partir de ellas, diseñar actividades que los acerquen más fácilmente a los temas que se pretende enseñarles; una de las tareas que deben realizar los docentes se relaciona con la búsqueda de las razones que se esconden detrás de las intuiciones, no explicadas, de los estudiantes.

Es dable resaltar la dificultad de encontrar publicaciones que reseñen el uso práctico y concreto de enfoques hermenéuticos explícitos o marcos referenciales de hermenéutica filosófica en la investigación en didáctica de las matemáticas y, particularmente, en didáctica de la probabilidad. Sin embargo, se encuentra

elementos investigativos teóricos bastante iluminadores propuestos en Gallardo et ál. (2008). La siguiente tabla resume las dualidades entre las concepciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas:

**Tabla 2.** Dualidades entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas.

<b>RASGOS DICOTÓMICOS</b>	<b>ORIENTACIÓN COGNITIVA</b>	<b>ORIENTACIÓN SEMIÓTICA</b>
Estatus de la comprensión	<i>Epistemológico</i> : fenómeno cognitivo, proceso mental, modo de conocer.	<i>Ontológico</i> : cualidad intrínseca, capacidad esencial del individuo.
Espacio de interpretación	Traslado a las realidades cognitivas internas del sujeto.	Traslado a los entornos semióticos generados por la actividad matemática.
Vía de acceso interpretativo	Observación de realizaciones externas objetivadas en registros verbales y escritos.	Práctica matemática visible y uso en ella de los sistemas de signos matemáticos.
Propósito de la interpretación	Estrechar progresivamente la distancia entre las realidades interna y externa.	Captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en la producción matemática.
Método	Círculo interpretativo en base a modelos de comprensión conjeturados a priori.	Modelo de <i>análisis estructural</i> de inspiración lingüística.
Fuente de objetividad interpretativa	Autonomía de las producciones. Propia estructura interna de las matemáticas dada por la fijación y producciones semióticas. Conservación en registros.	Propia estructura interna de las producciones lingüísticas.
Fronteras	Transición entre <i>lo interno</i> y <i>lo externo</i> ; los propios rasgos mentales de la comprensión.	Suspensión de la referencia externa de los registros semióticos; transición <i>hablado-escrito</i> ; omisión del texto como unidad de reflexión semiótica.

*Nota.* Tomada de Gallardo et ál. (2008).

Para tratar de subsanar esta dualidad entre lo cognitivo y lo semiótico, lo interno y lo externo, entre lo hablado y lo escrito, en la interpretación de la comprensión matemática, Gallardo et ál. (2008) ofrecen referentes hermenéuticos significativos. La comprensión se concibe como una actividad intelectual cognitiva, experimentada sólo por quien la desarrolla. También se presenta, así, en la matemática. Luego, la comprensión, tanto en la versión epistemológica- modo de conocimiento- como en la ontológica -capacidad del sujeto- demanda exigencias intelectuales vinculadas a la dimensión cognitiva de quien comprende. De aquí, se justifica que su estudio resulte una tarea bastante compleja, generando múltiples problemas a la investigación en Didáctica de la Matemática.

De otra parte, *“la comprensión es comunicable e incluye en su manifestación externa rastros interpretables”*. De manera que los fenómenos cognitivos no son del todo inexpresables y la manifestación de la comprensión viene dada a través del lenguaje. Luego, la principal fuente de las expresiones o rastros manifiestos derivados de la comprensión es el registro observable generado durante el quehacer matemático. De tal guisa que *“la circunscripción al registro observable, más que limitación, es una condición necesaria para la interpretación”*. Por lo que se tiene una opción interpretativa distanciada del interés por lo interno y se dirige al registro observable. Gracias a éste, se puede realizar la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático.

Si de las formas de realizar la interpretación se trata, es menester tener presente la singularidad de aquello que se pretende interpretar, de manera que no es concebible una pretensión metodológica consistente en aplicar procedimientos interpretativos inalterables a todos los registros particulares. Sin embargo, si se refiere a posibilidad que se confiere a los vestigios visibles, *“la interpretación demanda la textualización de todo registro observable”*. Considerándose, así, la estabilidad, la perdurabilidad y la independencia del registro escrito, una interpretación dirigida al texto. De tal manera que *“la*

*interpretación del registro escrito persigue caracterizar los usos del conocimiento matemático como rastros de comprensión*". Determinando, entonces, que la capacidad para usar los objetos de este conocimiento deriva de su comprensión y que la interpretación debe orientarse a la exteriorización y caracterización de los usos del conocimiento matemático observables en los registros escritos.

Finalmente, *"la estrategia interpretativa conjuga la componente semiótica del registro escrito con las referencias fenómeno-epistemológicas del conocimiento matemático"*. Así, para realizar la interpretación de los significados personales de los términos *Azar, Aleatoriedad y Probabilidad*, se puede proponer un estudio epistémico de estos conceptos; luego, solicitar manifestaciones escriturales relativas a ellos y, posteriormente, interpretar y conjeturar el significado en los textos de acuerdo al uso dado al conocimiento personal en relación al ideario matemático.

## 1.6. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

### 1.6.1. OBJETIVO GENERAL

Identificar los significados personales que estudiantes de Educación Media, partícipes de la investigación, manifiestan con respecto a los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*, interpretando las expresiones o textos referidos a ellos en relación con los significados institucionales de los mismos.

### 1.6.2. OBJETIVOS PARCIALES

- Establecer posibilidades teóricas para vincular concepciones acerca del lenguaje, en didáctica de la matemática, e ideas y formas interpretativas en hermenéutica filosófica.
- Identificar el significado personal que estudiantes de Educación Media refieren por escrito de los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*.
- Relacionar los significados personales de los estudiantes de Educación Media con los significados institucionales de los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*.

## CAPÍTULO II

### 2. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES CON RESPECTO A LOS TÉRMINOS *AZAR, ALEATORIEDAD Y PROBABILIDAD*

*Mi originalidad consiste en traer a la vida, de un modo humano, seres improbables y hacerlos vivir de acuerdo como las leyes de la probabilidad pero poniendo -tan lejos como sea posible- la lógica de lo visible al servicio de lo invisible.*

**Odilon Redon**

#### 2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un análisis histórico-epistemológico y matemático –desde una perspectiva didáctica- de los conceptos sobre los que versa esta investigación.

Las cuestiones epistemológicas son de gran importancia en el trabajo didáctico, ya que pueden permitir la identificación de obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos. En este caso, los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad* presentan un devenir histórico caracterizado por variedad en las significaciones atribuidas a ellos.

Los significados matemáticos, institucionales, de estos términos derivan en un problema del lenguaje, que no queda resuelto recurriendo simplemente a la axiomatización del campo de las probabilidades. Según Matalón (1979: 121),

*de modo más o menos explícito, todos los teóricos admiten que el cálculo de probabilidades formaliza algo que, en cierto sentido “existe” en todas partes; las divergencias se refieren a la naturaleza de ese “algo”, el cual estaría representado a través de la probabilidad del matemático.*

En este sentido, los significados matemáticos de los vocablos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad* no quedarían reducidos a una sola definición, cuando hay preocupación por el aprendizaje y la enseñanza de estos objetos; antes bien, las diversas situaciones y el uso contextual que se haga de ellos aportan rasgos característicos a estas nociones. Lo que condiciona la emergencia progresiva de los “objetos matemáticos” y su “significado” es el hecho de que, en determinadas prácticas, estén íntimamente unidos a las situaciones contextuales y a los problemas, junto con la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir el sentido de un objeto a su mera definición matemática (Godino y Batanero, 1994).

En el Anexo 3 se presentan los esquemas 1, 2 y 3 (p. 141-142) acerca de aspectos epistémicos de los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*, respectivamente.

## **2.2. AZAR**

Se consideran dos concepciones generales en el desarrollo de las ideas sobre el azar. De una parte, éste relacionado con causas desconocidas: fuerzas incontroladas de origen mágico o divino; de otra, la establecida según la relación causalidad y casualidad. En esta última se diferencian dos concepciones: una de ellas, el azar como opuesto a las causas o, equivalentemente, el azar como supuesta “causa” de los fenómenos de los cuales estas se desconocen, en sentido estricto. La otra concepción se refiere a que todo fenómeno tiene una causa y de

aquí se desprenden otras dos ideas acerca de lo eventual, el azar como medida de la ignorancia o, en contraste, el tratamiento que se dé a éste como muestra del conocimiento que sobre los fenómenos estocásticos se posee. A continuación se desarrollan estas ideas.

En un primer momento, el azar es concebido como una causa desconocida, que opera sobre los sucesos que resultan inesperados o “extraños” para quien los vivencia (Serradó et ál., 2005). De tal manera que éstos pueden resultar ocasionados por fuerzas incontroladas de origen mágico o divino. En particular, lo divino toma una relevancia especial, ya que se considera el poder de la Providencia como aquel agente que garantiza el orden y la armonía del universo (Batanero y Serrano, 1995). De tal suerte que, la voluntad divina, resulta como un hecho inexplicable para el ser humano. Así, el albur se constituye, débase o no a fuerzas sobrenaturales, en un supresor de la posibilidad de que el ser humano pueda influenciar, gracias a su voluntad, su inteligencia o su conocimiento, en la toma de ciertas decisiones o en el destino de su vida. Por ello, el ser humano debe recurrir a ciertas herramientas que puedan contribuir a develar un poco lo casual; por ejemplo, dispositivos como los huesos de astrágalo y los dados han servido para intentar adivinar el futuro o ayudar a tomar decisiones.

En un segundo momento pueden diferenciarse dos concepciones dependientes de la relación entre casualidad y causalidad, certidumbre e incertidumbre. De una parte, el ser humano puede establecer causas para ciertos sucesos, pero no puede hacerlo para otros, los cuales se atribuyen al acaso. En estas situaciones los conceptos se contraponen, o puede considerarse el azar como “causa” de aquellos sucesos que no pueden ser explicados en forma determinística. El sino sigue siendo algo desconocido, aún en el caso en el que algún hecho se establezca como producto de varios hechos causales independientes entre ellos; la relación entre las diferentes causas es incierta. Los clásicos diferenciaban dos tipos de fenómenos: Aquellos que parecían obedecer a leyes establecidas de una vez para siempre y aquellos que no lo hacían, no eran

previsibles, se revelaban ante toda ley. En este contexto, *“la palabra azar tenía un sentido preciso, objetivo; lo que era azar para uno era también azar para otro, incluso para los dioses”* (Poincaré, 1936).

Con respecto a la otra concepción, en la relación entre causalidad y causalidad, puede decirse que *todo tiene una causa, “nada sucede por azar sino que todo ocurre por una razón y por una necesidad”* (Leucippus, Siglo V a C., citado por Bennet, 1993). En esta concepción, el albur juega dos roles diferentes con respecto al conocimiento: Por un lado, éste se establece como medida de la falta de conocimiento del ser humano,

*es a causa de nuestra debilidad y de nuestra ignorancia que existe el azar para nosotros; e, incluso sin salir de nuestra debilidad humana, lo que es azar para el ignorante no lo es para el sabio. El azar no es más que la medida de nuestra ignorancia* (Poincaré, 1936:69).

Pero, de otro lado, también Poincaré cuestiona la concepción del azar como absoluta ignorancia. El tratamiento que se dé a éste, ante un fenómeno, avisará sobre el conocimiento que se posea de él. Debe diferenciarse entre aquellos fenómenos que se consideran fortuitos, sobre los cuales el cálculo de probabilidades brinda un conocimiento provisional, aún válido cuando se lleguen a conocer a cabalidad sus estructuras y aquellos fenómenos que no son fortuitos, sobre los cuales no puede decirse nada hasta el día que sean encontradas sus leyes.

De allí, entonces, la interpretación del azar como contraposición a lo causado o como un tipo de causación no es, en general, apropiada. Autores como Ayer (1974), citado por Batanero y Serrano (1995) y el mismo Poincaré (1936) proponen características para establecer si un suceso puede ser considerado como fortuito. De acuerdo con Poincaré, a veces una causa pequeña ocasiona un efecto considerable y se dice que éste es debido al azar, porque resulta imprevisible, como es el caso de la ruleta. En otros casos, no es la pequeñez de

las causas, sino la multitud o complejidad de las relaciones entre éstas, como en la teoría cinética de los gases, la que determina la casualidad en los sucesos.

También puede mencionarse la imposibilidad de los seres humanos para abarcar todas las posibilidades en el universo y que obliga a pensar de forma fraccionada, parcializada, sólo en presencia de lo alcanzado a observar, a tener en cuenta. Siguiendo a Ayer, cuando la frecuencia con que ocurre un cierto fenómeno sufre una desviación significativa, respecto del valor esperado, hay inclinación a pensar que esta desviación no pudo ser ocasionada fortuitamente; por ejemplo, cuando al lanzar una moneda, muy repetidamente se obtiene cara puede pensarse que la moneda se encuentra cargada. En otros casos, puede ocurrir, precisamente, que por el hecho de obtener una desviación significativa con respecto al valor esperado, el suceso se dio eventualmente, por ejemplo en las mutaciones humanas.

Además, cuando se obtiene ocurrencias no intencionadas por un agente, se tienen resultados fortuitos, en este caso no es falta de causa, sino de intención del agente. En ocasiones, se presentan coincidencias accidentales de sucesos y – aunque se pueda explicar la ocurrencia de cada uno de ellos por separado- no pueda explicarse la presencia simultánea. Se utiliza el término *azar* en casos de generalizaciones estadísticas, en los que pueda decirse cuáles objetos se encuentran en una de aquellas, pero está implícito el hecho de que los sucesos individuales no han admitido una regulación mediante leyes causales.

Finalmente, el reconocimiento de la diversidad de concepciones y caracterizaciones del azar ha promovido lo que Serradó et ál. (2005) denominan *Discurso de la Complejidad*, en el que éste se concibe como un elemento ontológicamente ligado a la complejidad existente en la realidad.

### 2.3. ALEATORIEDAD

Las concepciones relacionadas con el término *aleatoriedad* están estrechamente referidas a ideas en el campo de la probabilidad. Se pueden establecer algunos contextos en los cuales se ha desarrollado el concepto de aleatoriedad.

En un primer contexto, la aleatoriedad se relaciona directamente con el concepto de equiprobabilidad, el cual se basa en el *principio de indiferencia* (Batanero y Serrano, 1995). También llamado principio de la razón insuficiente o principio de Laplace, puede interpretarse en situaciones en las que no haya razones evidentes para inclinarse por una posibilidad, en cuyo caso todas las opciones son igualmente válidas.

En casos de escogencias entre varias opciones, puede hablarse de “elecciones al azar”. Se puede definir el experimento aleatorio de elegir eventualmente uno o varios objetos, entre una colección de objetos. “*El término ‘elegir al azar’ que se utiliza en estos casos se entiende en el sentido de que, al elegir los objetos no se tiene preferencia por ninguno de ellos sobre la elección de otro*” (García, 2005:54). Ahora bien, si se considera la probabilidad como un número que representa la facilidad con la que un suceso, dentro de un experimento fortuito, se presenta al realizarlo, entonces, al considerar el acto de “elegir al azar” un objeto, de una colección de objetos, se tendría que asignar a cada posible resultado del experimento el mismo valor; en este caso se dice que los posibles resultados son *equiprobables*. De esta manera, no sólo queda una relación sinonímica entre los términos aleatoriedad y equiprobabilidad, sino también entre los anteriores y la expresión “al azar”.

En este contexto se pueden interpretar los acontecimientos lúdicos que, según la historia de las matemáticas, desde Cardano (1501–1576), han promovido el desarrollo de la interpretación y la teorización matemática de la probabilidad.

Esta interpretación es característica de aquellas situaciones en las cuales el número de posibilidades es finito y el principio de indiferencia puede considerarse razonable (Batanero y Serrano, 1995).

En un segundo contexto, la aleatoriedad se desplaza de los acontecimientos lúdicos, inicialmente, hacia los fenómenos físicos y, posteriormente, hacia los acontecimientos de la vida cotidiana de orden social (Serradó et ál., 2005). A finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX las situaciones consideradas aleatorias eran características en muchos fenómenos físicos (Bennet, 1993). En el estudio de la física estadística (estudio del comportamiento de un sistema conformado por muchas partículas) se explicaban las leyes de la termodinámica y las leyes de los gases de acuerdo al movimiento azaroso de las moléculas (en las ciencias físicas tradicionalmente se ha considerado lo aleatorio como la ausencia de causas determinadas o controladas).

También se ha pensado, en la ciencia moderna, que al realizar algún experimento la idea sería poder controlar todas las variables para poder obtener siempre el mismo resultado pero, al no lograrse esto, las variaciones se atribuyen a influencias incontroladas, aleatorias. En este sentido, la aleatoriedad podría ser interpretada como falta de información por parte del experimentador. Desde la llegada de la física cuántica, pareciera como si el mundo fuera irreduciblemente casual, se cree que muchos procesos físicos, resultantes de fenómenos mecánico-cuánticos, son atómicamente aleatorios. Tal es el caso que, *“tanto en dinámica clásica como en física cuántica las leyes fundamentales ahora expresan posibilidades, no certidumbres”* (Prigogine, 1996:9).

Las reflexiones acerca del determinismo, la posibilidad del conocimiento absolutamente válido, la demostrabilidad, en contraste con cuestiones acerca de la incertidumbre, las múltiples posibilidades, la inestabilidad, características de, por ejemplo, la creatividad humana, la ética, la estética, han estado en el centro del pensamiento occidental, aún desde el origen de lo que se llama racionalidad. Pero

*considerarnos extraños a la naturaleza involucra un dualismo ajeno a las aventuras de las ciencias y de la pasión de inteligibilidad propia del mundo occidental. Según Richard Tarnas, esa pasión es “reencontrar la unidad con las raíces del propio ser”. Hoy creemos estar en un punto crucial de esa aventura, en el punto de partida de una nueva racionalidad que ya no identifica ciencia y certidumbre, probabilidad e ignorancia (Prigogine, 1996:15).*

Una racionalidad así sería deseable para que el ser humano pueda reflexionar sobre su praxis de otra manera, en el contexto social en el que habita.

*Los fenómenos aleatorios inundan la vida cotidiana de las personas y, según Persi Diaconis, nuestros cerebros no están precisamente preparados para resolver adecuadamente problemas de probabilidad. Todos los días no levantamos y tenemos que enfrentar los problemas de la vida y de la muerte: nacimientos, herencia biológica, fallecimientos, enfermedades, accidentes; cómo evaluar los riesgos y beneficios ante una intervención quirúrgica de rodilla (Borel, 1988).*

También la diversión o el placer traen problemas de incertidumbre, de aleatoriedad: Cómo jugar, con buenas posibilidades de ganar, en una partida de naipes; cómo escoger frente al lanzamiento de una moneda antes de un evento deportivo; cómo interpretar los sucesos imprevisibles en un partido de fútbol; cómo interpretar adecuadamente los sucesos en juegos de dados; serán realmente aleatorios los números escogidos en las loterías; cómo interpretar adecuadamente los problemas de apuestas de diversa índole (Haigh, 2003).

Haciendo mención de otros casos, puede pensarse, por ejemplo, sobre cómo interpretar los sucesos políticos frente a las elecciones; cómo interpretar las ventajas y desventajas de los métodos de planificación; será conveniente comprar acciones de alguna empresa frente a determinada información; será que la probabilidad de que llueva el fin de semana es del 100%, si en las noticias informaron que hay una probabilidad del 50% de que llueva el sábado y un 50% de que llueva el domingo (Paulos, 2000). Este autor reflexiona sobre los problemas que las personas pueden afrontar, sino poseen una adecuada preparación matemática en probabilidad, para interpretar los fenómenos

aleatorios, “*el anumerismo, o incapacidad de manejar cómodamente los conceptos fundamentales de números y azar, atormenta a demasiados ciudadanos que, por lo demás, pueden ser perfectamente instruidos*” (Paulos, 2000:6).

Henry Kyburg (1928-2007), quien fue profesor de filosofía y ciencias computacionales en la universidad de Rochester en New York, propone una concepción de la aleatoriedad caracterizada de acuerdo a cuatro elementos independientes: Un objeto, que se supone es miembro aleatorio de una clase; un conjunto, del cual el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo); una propiedad, con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada y el conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad (Kyburg, 1974).

Por ejemplo, el objeto *lado cara* de una moneda pertenece a la clase conformada por cara y sello. Al lanzar la moneda al aire se espera que se obtenga uno de estos dos posibles resultados, siendo cada uno de ellos impredecible, ya que su ocurrencia se considera como una propiedad aleatoria en el lanzamiento. Hasta aquí se podría asignar una probabilidad de un medio a cada posible suceso. Pero, otras informaciones de las cuales podría hacerse conocer el sujeto que da el juicio de aleatoriedad, tales como, si la moneda no está equilibrada, si la moneda es de chocolate y pudiese partirse, si hay muchas grietas en el lugar donde caería la moneda, podrían hacer que se cambiase el valor asignado a los sucesos. Kyburg propone otro ejemplo, considerar la probabilidad de que un individuo llegue a vivir 35 años. Puede obtenerse una cifra estimada estadísticamente acerca del número de personas que llegan a esta edad en su población. Pero puede haber muchas otras informaciones que podrían hacer cambiar las decisiones con respecto a este valor, por ejemplo, si se sabe que la persona en particular sufre de alguna enfermedad o si realiza un trabajo peligroso.

Por ello, de acuerdo con Batanero y Serrano (1995:18),

si un objeto es o no considerado como miembro aleatorio de una clase, depende, en esta interpretación, de nuestro conocimiento sobre el mismo. Lo que puede ser aleatorio para una persona puede no serlo para otra. La aleatoriedad no es una propiedad física “objetiva”, sino que tiene un carácter subjetivo.

## 2.4. PROBABILIDAD

El significado del término *probabilidad* no es unívoco, posee significados dependiendo de las diferentes concepciones respecto al pensamiento probabilístico latente. *“Es cierto que las distintas clases de probabilidad son menos comprendidas... existen actualmente muchas explicaciones útiles de las diversas ideas de la probabilidad”* (Hacking, 1995:27).

Por ello, se considera necesario un estudio epistemológico del tema, para observar la polisemia del concepto de probabilidad y poder tener consciencia del significado que se esté utilizando en algún momento. *“La vasta mayoría de practicantes de la probabilidad no hacen tal cosa. Continúan hablando de probabilidad, haciendo sus estadísticas y aplicando su teoría de errores sin tener en cuenta toda esta sutileza acumulada”* (Hacking, 1995:28).

Aunque el pensamiento acerca del azar es muy antiguo y el uso de la palabra “probabilidad”, derivada del latín *probabilis*, es también bastante antigua, el concepto de probabilidad comenzó alrededor de 1660. Frente a la cuestión del significado del vocablo, antes de su uso matemático, algunos filósofos ingleses, estimulados por un interés en el “lenguaje ordinario”, han enfatizado algunos significados del término, aún antes de 1662, llegando a expresar que el sentido primario de la palabra fue evaluativo y puede serlo aún hoy día:

*De acuerdo con W. C. Kneale, "si escuchásemos a un hombre hablar, en la vida ordinaria, sobre la igualdad probabilística de varias alternativas, debiéramos entenderle como queriendo decir que son igualmente dignas de aprobación como bases para la acción" [1949, p.169]. O nuevamente: en el uso "común o corriente" de la palabra "probable", "éste es un término evaluativo. Decir que una proposición es probable, es como decir que está bien hacer tal o cual cosa" [Körner, 1957, p.19]... Probabilis significó, entre otras cosas, algo como "merecedor de aprobación"... hace un par de siglos atrás, se hablaba fácilmente de un "probable doctor", queriendo decir, aparentemente, un médico en quien se puede confiar. En aquellos usos pasados, el término, o sus formas gramaticales, significaba, razonablemente, que quien lo usaba expresaba que algo tenía las marcas de la verdad o que estaba sustentado por evidencias. Pero, en la actualidad, "usamos las palabras 'probable', 'probablemente'... para emitir un juicio tentativo. Existen razones, pero no concluyentes, de lo que opinamos [Lucas, 1970]" (Hacking, 1995:32-33).*

Pero, ¿Cuáles son las razones por las que, a pesar de que muchas civilizaciones contaban con dispositivos y juegos relacionados con el azar, no hubo un desarrollo del concepto de probabilidad hasta el siglo XVII? Hacking (1995) describe algunos motivos para ello. Se ha afirmado que el pensamiento probabilista es excluido por una visión determinista del mundo; no obstante, que el pensamiento determinista sea esencial para la formación de los conceptos de azar y probabilidad, se constituye en una conjetura alternativa más adecuada. Tal vez, por ello, el modelo de causación mecánica y el modelo probabilístico emergen en el mismo periodo histórico, desde el siglo XVII.

Los aparatos aleatorios que permitan generar, empíricamente, sucesos del azar son necesarios para llegar a concebir las leyes de la probabilidad; las primeras experiencias aleatorias siempre emplean lo que Neyman (1950), citado por Hacking (1995), llamó un "Conjunto de Probabilidad Fundamental" de alternativas igualmente probables. Sólo después de que el individuo comprenda esta idea puede progresar a situaciones en las que las alternativas no sean equiprobables. Se alude que, en la antigüedad, no existía una tal situación que diese ideas de equiprobabilidad; por ejemplo, los dados cúbicos antiguos, hallados en tumbas egipcias, datadas como anteriores al 2000 a.C., no proporcionan un

conjunto de seis posibilidades iguales dado que no son uniformes, ni en el tamaño, ni en el material, ni en la forma de numerar sus caras. Sin embargo, replica Hacking, si bien no mucho, existía material aleatorio adecuado, por ejemplo, se conservan dados de marfil antiguos, muy bien equilibrados, en el Museo de Antigüedades del Cairo.

Para no tener que acudir a sacerdotes intermediarios puede recurrirse a los dados y otros dispositivos aleatorios de consulta a los dioses, pero entonces resultaría pagano intentar computar lo que ellos dicen. Por lo tanto, una actividad impía, como la de la adivinación, podría excluir investigaciones críticas de las leyes de la aleatoriedad. No obstante, muchas personas impías y cultas eran aficionadas a los juegos de azar y no por eso reflexionaron sobre la aritmética de lo fortuito (Hacking pone como ejemplo a Marco Aurelio).

Dos razones por las cuales una ciencia avanza, se relacionan con la búsqueda de respuesta a los problemas que ella misma crea y a aquellos que le son propuestos desde otros campos, en ocasiones problemas derivados de necesidades económicas. Ahora, históricamente, el estímulo hacia el desarrollo de la teoría de la probabilidad provino de otras disciplinas: en el S. XVII el establecimiento de los seguros y anualidades en la estadística, en el S. XVIII la teoría de la medida se desarrolla con fuerza, sobre todo, al servicio de la astronomía, en el S. XIX se creaba la biométrica para el análisis de datos biológicos, en el S. XX las necesidades de la agricultura y la medicina. Sólo recientemente esta rama de la matemática ha sido capaz de generar sus propios programas de investigación, buscar solución a los problemas que ella misma crea. Sin embargo, esta justificación, basada en el desarrollo de la economía, no tiene en cuenta algunos progresos del cálculo aplicado al comercio, reconocido en la época romana.

No fue sino hasta que Leibniz, en 1666, publicara su obra *Ars Combinatoria* que se dispuso de ideas y capacidad de cálculo para desarrollar una matemática

del azar. En contraste, los indios y árabes tuvieron un buen sistema de numeración y desarrollaron terminología y cálculos probabilísticos (tan árabe como el término *al-ğabr*, lo es también el término *hazard*). Es importante destacar que las técnicas combinatorias contribuyeron a la aparición histórica de la probabilidad.

Cada una de las anteriores razones Hacking las considera insuficientes, por separado, para explicar el surgimiento de la matemática del azar. Más bien, el autor propone que la conjunción de diversos factores, tales como “la impiedad”, la existencia de una aritmética apropiada, un diferente concepto de causalidad y el desarrollo comercial, debería conducir a la formación de la matemática de la probabilidad.

El matemático y filósofo italiano Gerolamo Cardano (1501-1576) fue uno de los primeros pensadores en proponer un argumento teórico para calcular las posibilidades de los diferentes resultados en un juego de dados. En él se encuentra, por primera vez, una idealización explícita de equiprobabilidad. Cardano analiza el lanzamiento de un dado en *Líber de ludo aleae*:

*La mitad del número total de caras representa la igualdad; así, son iguales las probabilidades de que un punto dado salga en tres tiradas, cuando el circuito total es de 6 y de que salga uno de tres puntos dados en una tirada. Por ejemplo, puedo conseguir tan fácilmente 1, 3 ó 5 como 2, 4 ó 6. Las apuestas hay que hacerlas de acuerdo con esta igualdad si el dado esta equilibrado (citado en Hacking, 1995:54).*

Pero, de acuerdo a la leyenda, la probabilidad comenzó en 1654, cuando Blaise Pascal (1623-1662) resolvió algunos problemas que le propuso el Caballero de Méré y le escribió a Pierre de Fermat (1601-1625) acerca de ellos. Un problema que de Méré planteó a Pascal se relacionaba con la cantidad de lanzamientos necesarios para tener una probabilidad de 0.5 de conseguir al menos un “doble seis” al lanzar dos dados. Otro tenía que ver con el reparto equilibrado de premios, si un juego tiene que pararse o finalizarse antes de lo previsto (el problema de la división de premios). Un ejemplo de este tipo de reparto está dado cuando, en una partida de dados, dos jugadores apuestan 23

doblonos de oro cada uno, eligiendo sendos números. Gana el juego el primero que salga tres veces, en tiradas alternativas, con el número que previamente ha elegido. Después de un rato de juego el número elegido por el primer jugador ha salido dos veces y el del otro sólo una vez. En ese instante, la partida debe suspenderse, ¿cómo dividir los 64 doblones apostados?

Aunque Cardano haya hecho cálculos probabilísticos y Pascal, junto con Fermat, hayan explorado interesantes problemas de probabilidad, fue el holandés Christian Huygens (1629-1695), quien publicó en 1657 un breve tratado titulado *De ratiocinis in aleae ludo*, el que hizo explícito un razonamiento matemático sobre situaciones casuísticas. Primero se inspiró en la correspondencia entre Pascal y Fermat, para luego realizar una síntesis de ideas de modo sistemático, además, de generalizaciones desde las soluciones de problemas aleatorios. Con Huygens se desarrolló una rama de aplicaciones estadísticas, en tanto que estableció una tabla de mortalidad, definió conceptos como tiempo medio de vida y trató las frecuencias de la misma manera que las probabilidades. De acuerdo a Cesar Sáenz, al final del libro de Huygens, aparecen problemas que han sido objeto de estudio durante varias generaciones de matemáticos. Algunos de ellos son ambiguos y reflejan la dificultad de interpretación de los enunciados y lo mal establecido que estaba el lenguaje de la teoría de las probabilidades. A manera de ilustración se tiene:

*Tres jugadores A, B y C meten 12 fichas en una bolsa de las que 4 son blancas y 8 negras. El ganador es quién primero extraiga una ficha blanca. El orden en que extraen los jugadores es: Primero A, luego B, después C, después A y, así, hasta terminar ¿Qué relación hay entre las probabilidades de ganar, que tiene cada jugador?*

El suizo Jacques Bernoulli (1654-1705) ya señaló que por lo menos se pueden realizar tres diferentes interpretaciones en esta situación. Cada vez que se extrae una ficha negra se devuelve a la bolsa. O, las extracciones son sin reemplazamiento. O se puede suponer que cada uno de los tres jugadores comienza con su propia bolsa de doce fichas y las va extrayendo sin

reemplazamiento. “En la correspondencia que se cruzó Huygens con otros estudiosos de la época aparece la ambigüedad de la interpretación de unos y otros, aunque parece que Huygens se inclina por la primera interpretación” (Sáenz, 1997:97).

De acuerdo con Hacking, Gottfried Leibniz (1646-1716) fue el primer filósofo de la probabilidad. Sostuvo que ésta podía llegar a ser una rama de la lógica, similar a la teoría de la deducción, e intentó axiomatizarla como una ciencia inferencial pura. Escribió el primer texto de teoría combinatoria, llamado *Ars Combinatoria*, y estableció relaciones entre ella y la teoría naciente.

Una obra significativa en la temprana historia de la probabilidad es *Ars Conjectandi*, de Jacques Bernoulli. El texto presenta cuatro partes. En la primera, una versión mejorada del libro de Huygens sobre los juegos de azar, explica el concepto de *esperanza* matemática, como el deseo de conseguir lo mejor, menos el temor de conseguir lo peor. En la segunda, presenta la teoría de combinaciones y en la tercera la aplica a resolver problemas nuevos sobre juegos sometidos a la casualidad. La cuarta parte, denominada “Aplicaciones de lo anterior a problemas económicos, morales y civiles”, presenta una doble revolución: Por un lado se declara explícitamente una concepción subjetiva de la probabilidad y, por otro, se prueba el primer teorema límite. De acuerdo con Sáenz:

*la primera ley de los grandes números, que Bernoulli llamó teorema aureum, supuso un decisivo progreso conceptual en cuanto que estableció el fundamento sólido para enlazar las frecuencias relativas y las probabilidades. El problema planteado es el siguiente: supongamos que lanzamos, sucesivamente, una moneda con probabilidad  $p$  de salir cara ¿Qué podemos decir sobre la frecuencia relativa de caras en una sucesión larga de lanzamientos de la moneda? Este problema es el origen de los teoremas límite en probabilidades: las leyes de los grandes números y el teorema central del límite. J. Bernoulli demuestra que la frecuencia relativa de caras en  $n$  lanzamientos de una moneda regular ( $p=1/2$ ) “converge” a  $\frac{1}{2}$ . La convergencia de Bernoulli (convergencia en probabilidad) tiene el siguiente sentido:*

$$P\left[\left|\frac{n^{\circ}\text{caras}}{n} - \frac{1}{2}\right| > \epsilon\right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \forall \epsilon > 0 \quad (\text{Sáenz, 1997}).$$

En palabras se puede decir: si una moneda se lanza un número muy grande de veces ( $n \rightarrow \infty$ ) y se calcula la frecuencia relativa con que se obtiene cara  $\left(\frac{n^{\circ}\text{caras}}{n}\right)$ , la probabilidad ( $P$ ) de que el valor positivo de la diferencia entre esa frecuencia y  $\frac{1}{2}$  sea mayor que cualquier número positivo ( $\forall \epsilon > 0$ ) tiende a cero ( $\rightarrow 0$ ); o también, puede decirse que, es probable, que la frecuencia con que se obtenga cara, en un número grande de lanzamientos, se aproxime a  $\frac{1}{2}$ .

Las ideas de Bernoulli se pueden definir como un determinismo metafísico, donde todos los fenómenos (el clima, lanzamientos de dados) están gobernados por leyes determinísticas y el azar es debido al desconocimiento de esas leyes.

Con el francés Pierre-Simón Laplace (1749-1827) se inicia la edad moderna de la probabilidad. Su pensamiento filosófico aún se basaba en un determinismo mecanicista al tratar de establecer causas para los fenómenos y llega a imaginar un ser, el llamado "Demonio de Laplace", que poseería el conocimiento de toda causalidad:

*hemos de considerar el estado actual del universo como efecto de su estado anterior y como causa del que ha de seguirle. Una inteligencia que en su momento conociese todas las fuerzas que animan a la naturaleza... nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos (Laplace, 1995:25).*

En correspondencia, su concepción sobre la probabilidad la atribuye al desconocimiento del ser humano, como una necesidad para poder tratar de comprender lo que escapa a su capacidad cognoscitiva, "la probabilidad es relativa en parte a esta ignorancia (desconocimiento de las causas de los fenómenos) y en parte a nuestros conocimientos" (Laplace, 1995:27).

Laplace dio la primera definición de probabilidad, en relación con las posibilidades de los sucesos en un fenómeno y usando las razones matemáticas:

*La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que estemos igual de indecisos en cuanto a su existencia, y en determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad se busca. La proporción entre este número y el número de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad (Laplace, 1995:28).*

Para llevar a la práctica el cálculo expreso en la definición, Laplace debió formular un principio filosófico, bastante controversial, denominado Principio de Razón Insuficiente, que puede interpretarse, así: los posibles resultados, al estudiar una situación, deben tomarse como igualmente posibles, si no hay razón para considerar alguno de ellos más o menos posible que los otros. Entre las críticas al Principio enunciado, Fine (1973) resume su crítica afirmando que no es posible, frente a un fenómeno en el cual se ignoran los grados de posibilidad de los resultados, pasar del desconocimiento al conocimiento, asumiendo que ellos sean igualmente probables y, por lo tanto, el Principio de Razón Insuficiente es ambiguo; y, en este sentido, la teoría clásica de la probabilidad ni es objetiva, ni es empírica.

El estudio matemático de la probabilidad no encontró un desarrollo formal, universalmente aceptado, hasta que, en 1933, el ruso Andréi Níncoláyevich Kolmogorov (1903-1987) formuló un sistema de axiomas de los cuales pudo deducir los teoremas usuales. El trabajo de Kolmogorov no clarifica lo qué es la probabilidad, sólo desarrolla formalmente las propiedades estructurales de la teoría matemática: *“toda exposición posterior debe realizarse exclusivamente bajo estos axiomas, independientemente del uso usual concreto de estos elementos y sus relaciones”* (Kolmogorov, 1993:1); dejando la interpretación del significado como una cuestión abierta.

El problema de la esencia de la probabilidad no debe tratarse como un simple problema de cálculo formalizado y, tampoco, debe considerarse como un simple reflejo del pensamiento de quien interpreta los fenómenos fortuitos. Desde sus orígenes este conocimiento ha tenido una naturaleza dual, *“por un lado es estadística y le conciernen las leyes estocásticas de los procesos aleatorios. Por*

*otro, es epistemológica, dedicada a estimar grados razonables de creencia en proposiciones bastante carentes de un trasfondo estadístico” (Hacking, 1995:25).*

Puede seguirse un poco el estilo de Matalón para ejemplificar este aspecto dual de la probabilidad. En el lenguaje ordinario los términos “probable, probabilidad” parecen susceptibles de adquirir diferentes significaciones, próximas, pero distintas (Matalón, 1979). Si se juega parqués con dos dados, se puede afirmar que es “poco probable” obtener un puntaje de 12 en una tirada (es más probable obtener, por ejemplo, 7). ¿Tendrá el mismo significado afirmar que es “poco probable” que mi compañero de juego haga trampa?

Algo común en las dos frases es la manifestación de algo de lo que no se está seguro que ocurra; pero tampoco existe una ignorancia absoluta. En el primer caso, la aseveración depende de la experiencia del juego o del conocimiento del cálculo de probabilidades. En el segundo, el grado de credibilidad depende de aspectos como el conocimiento que tenga de la otra persona, de lo sucedido durante el juego, de la actitud que demuestre el adversario. El término “probable” se refiere a algo que genera incertidumbre, duda, expectativa, asombro, extrañeza...

Pero, hay implícitos aquí dos sentidos atribuidos al término “probable”, que refieren algún grado de incertidumbre. *“De hecho, los problemas importantes que se plantean se refieren al hecho de saber si, una vez admitido que la probabilidad refleja una incertidumbre, inversamente, todo sentimiento de incertidumbre puede representarse mediante una probabilidad, en el sentido del matemático” (Matalón, 1979:123)*

El análisis de la situación, con respecto a la obtención de 12 puntos, se puede realizar en dos sentidos. Siguiendo la definición laplaceana de probabilidad, se tendría que pensar que los dados, con los cuales se juega, están equilibrados, para poder suponer que la obtención de cada resultado tiene la misma posibilidad que la obtención de cualquier otro. Luego se puede calcular que la totalidad de

posibles resultados es de 36 y que una suma de 12 sólo se puede obtener en uno de los casos. Por tanto, la probabilidad de obtener 12, en el lanzamiento de los dos dados, es de  $1/36$ . Pero, ¿Qué puede representar este valor? Que de 36 lanzamientos de los dados, sólo en 1 se obtenga 12. Este significado es claramente probable, porque en los 36 lanzamientos puede ocurrir que no se obtenga ningún 12 o que se obtengan más de 1.

En el otro sentido, si se pudiera repetir la situación del lanzamiento de los dados un número muy grande de veces y se observara la relación entre el número de ocasiones que se obtiene el 12 y el número total de lanzamientos, probablemente esta relación se aproxime a  $1/36$ .

El primer sentido de la probabilidad, denominado concepción clásica o laplaceana, y el segundo sentido, denominado concepción frecuencialista, encuentran vinculación a través de la ya mencionada Ley de los Grandes Números, establecida por J. Bernoulli. Esta ley indica que, si se puede realizar un experimento un número indefinido de veces, la relación entre el número de ocurrencias favorables a un suceso sobre el número total de sucesos (frecuencia) tiende hacia la probabilidad (clásica o laplaceana) cuando el número de sucesos tiende al infinito.

En estos sentidos, es posible otorgar un status objetivo y preciso al concepto de probabilidad. Su carta de naturaleza es una característica inherente al fenómeno en cuestión e independiente del sentido de incertidumbre del sujeto que observe lo acontecido. Aunque algunos objetivistas intentaron dar cuenta de algún acontecimiento único o por naturaleza irrepitable, bajo las mismas condiciones, *“en esta perspectiva, hablar de la probabilidad de un acontecimiento por naturaleza único o, en forma más general, de la probabilidad de que una proposición sea verdadera, no tiene sentido”* (Matalón, 1979:125).

A las limitaciones que pueda imponer la concepción objetivista de la probabilidad, los “subjetivistas” intentan aplicar el cálculo al mayor número posible

de sentimientos de incertidumbre, sin pretender por ello abarcarlo todo. Mas bien, lo que intentaron demostrar fue que si un sujeto es coherente en su comportamiento, frente a las situaciones inciertas, entonces las “plausibilidades” que atribuye a los diferentes acontecimientos se pueden tratar como probabilidades, en el sentido del cálculo matemático; de tal manera que éste, expresa la coherencia del comportamiento. (Matalón, 1979)

Una idea básica trabajada en esta perspectiva es la apuesta, la cual ofrece una posibilidad operacional a la noción de probabilidad. Se consideran las apuestas que un sujeto racional está dispuesto a aceptar frente al acontecimiento de un suceso incierto. No importa cómo el sujeto logre su grado de confianza frente a los sucesos, sino que, si su comportamiento es coherente, resulte posible reconstituir (objetivamente) las asignaciones (subjetivas). *“Evidentemente, en esta perspectiva la probabilidad resulta una propiedad de un individuo y no de un acontecimiento”* (Matalón, 1979:126).

La idea de comportamiento coherente ha exigido gran atención a los subjetivistas. Savage considera la siguiente situación general como la caracterización de un comportamiento “racional” frente a la incertidumbre:

*El individuo en cuestión debe tomar una decisión, es decir, debe elegir entre diferentes actos, excluyentes entre sí. La consecuencia de la decisión depende, simultáneamente, del acto elegido y de la naturaleza del estado que se produce, cuya ocurrencia resulta independiente de la decisión tomada. El individuo conoce la lista de todos los actos posibles, la de todos estados posibles de la naturaleza, así como las consecuencias de cada acto respecto de cada estado de la naturaleza. La incertidumbre se debe exclusivamente al hecho de que ignora cuál de los estados de la naturaleza se producirá* (Savage, 1954 citado en Matalón, 1979:127).

En caso de que el compañero del juego de parques haga trampa, se determinan dos estados de la naturaleza: que la realice o no. Los actos a considerarse pueden ser numerosos: pararse sin decir palabra y retirarse, hacer el reclamo, reclamar la victoria adelantada de la partida, esperar a otro indicio más categórico de la situación, entre otros. También es muy amplio pensar

posibilidades con respecto a las consecuencias; por ejemplo, que se realiza el reclamo, siendo inocente el compañero de juego, o, en caso de que sea culpable, el resultado puede ser no seguir perdiendo con él.

Las críticas a las características expresadas de la concepción subjetiva son fuertes. Por ejemplo, es muy difícil medir, efectivamente, las probabilidades personales de alguien que se supone está siendo coherente en sus decisiones.

También críticas fuertes a la concepción objetivista han sido realizadas, por ejemplo, por Kyburg (1974). Con respecto a la definición laplaceana, sugiere que este método de definir la probabilidad impone restricciones no naturales y severas en la aplicación de la idea. Sólo se podría calcular para un suceso si este pertenece a una clase finita. Si fuese infinita, entonces, siempre sería nula (por tanto idéntica) para cada suceso de la clase, aunque el método de selección fuese sesgado. En lo referente al sentido frecuencialista de la concepción objetivista, se tiene el problema teórico de decidir el número necesario de repeticiones de un experimento para considerar que, a partir de este número, se posee una aproximación adecuada al valor de la probabilidad.

En definitiva, Kyburg, frente a la probabilidad “objetiva”, propone otra interpretación, como ya se había mencionado, compuesta de cuatro términos, a recordar: el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase, el conjunto del cual el objeto es un integrante, la propiedad con respecto a la cual el objeto pertenece a la clase dada y el conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad. Si un objeto es o no considerado como elemento aleatorio de una clase depende, en esta interpretación, del conocimiento sobre el mismo. Se reconoce en esta definición el paralelismo con la concepción subjetiva de la probabilidad. Esta visión sería más adecuada en las situaciones en que se posee cierta información, que puede cambiar el juicio sobre un suceso fortuito.

## CAPÍTULO III

### 3. INTERPRETACIÓN DE LOS TEXTOS DE LOS ESTUDIANTES

*No hay hechos, sólo interpretaciones.*

**Nietzsche**

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se realiza una interpretación de los significados personales de estudiantes de Educación Media relacionados con los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*, de acuerdo a textos escritos por ellos, expuestos en la Tabla 3, y con respecto a los planteamientos teóricos estudiados en los Capítulos I y II; además, se realiza la inclusión de elementos teóricos de algunos autores. Se precisa que algunas interpretaciones son realizadas en referencia al discernimiento propio de los investigadores, de acuerdo a las precomprensiones de las situaciones.

También se relacionan, interpretativamente, los significados personales con los institucionales respecto a los vocablos estudiados en el segundo capítulo, de tal manera que se trata de encontrar, *exhaustivamente*, relación entre las diferentes concepciones epistémico-matemáticas y aquellas particulares interpretadas en algunos de los textos de los estudiantes, sin forzar las interpretaciones.

Es de precisar que no todos los textos de los estudiantes son referenciados en las interpretaciones y que algunos aparecen en aquellas una o más veces. Todo ello, de acuerdo a la subjetividad interpretativa de los

investigadores, la cual se inclina, no tanto al *cómo* estructurado del texto, sino al *qué* propuesto. En este sentido, la idea es ir más allá de las relaciones internas que componen los escritos y preocuparse por la referencia indirecta liberada, para finalizar con un nuevo texto, un nuevo discurso articulado al de la composición original. Las palabras, las expresiones y las estructuras originales de los textos se asumen literalmente, son tomadas de la forma en que han sido escritas por sus jóvenes autores. Al leerlos, interpretativamente, los investigadores podrían desplegar nuevas posibilidades de significación, otras formas de ser-en-el-mundo.

Elas son múltiples: pueden asemejarse con imágenes que son evocadas por los referentes teóricos de esta investigación o pueden hacerlo con otros autores, que han sido también explicitados o pueden promover representaciones nuevas, las cuales son textualizadas y tienen génesis en las precomprensiones, dadas gracias a las experiencias en el mundo de la vida, tanto en el ejercicio de la profesión educativa como en la cotidianidad. En todos los casos, se trata de esbozar las ideas referidas, liberadas o creadas mediante la argumentación textual que propone un nuevo horizonte de significado, una hipótesis de sentido.

De allí, es importante asentar que entre todos los lectores que se integren al mundo de las interpretaciones pudiesen algunos estar de acuerdo, acoger las hipótesis de significado, o asumirse en desacuerdo con respecto a lo interpretado. Por lo tanto, es fundamental manifestar el sentido ético de *responsabilidad argumentativa* con respecto a las interpretaciones y recordar que los mundos de significación desplegados por los textos, y estos mismos, deben ser revisitados –interpretativa y argumentativamente- por los nuevos disertantes.

Se comunica, además, que muchos de los estudiantes manifestaron su deseo de no reconocimiento en la autoría de los textos; en otros casos, no

resulta prudente hacerlo por razones de seguridad social y personal, por lo tanto, y para comodidad del lector, en la Tabla 3 se codifican los escritos y expresiones de los educandos del [1] al [208], para realizar las consiguientes referencias en las interpretaciones. Los datos textuales son organizados de acuerdo a las acciones planteadas a los jóvenes escritores, a saber, reconocimiento, relato y problematización para cada uno de los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*. En un primer momento, en la búsqueda de horizontes de significado, realizada por los investigadores, se revisan los textos de cada una de las diferentes situaciones; sin embargo, en otro momento, escritos de otra u otras de aquellas posibilitan la construcción de hipótesis de sentido interpretativo, lo cual muestra relaciones en la incertidumbre referida por los tres vocablos.

### 3.2. ACERCA DEL AZAR

*En los hallazgos de nuestros estudios aseveramos  
nuestra misma firma y voz -nuestra "presencia  
autoral"- y sostenemos que estamos al tiempo "allá"  
-inextricablemente parte de lo que observamos- y  
"aquí" apropiadamente retirado de ello.*

(Geertz, 1988)

Con respecto a Belmonte (2005), cuando se refiere a los juegos puros de azar y a los juegos de estrategia, como dos polos extremos en una graduación, en la que muchos juegos pueden tener un cierto componente fortuito y otro de táctica, se interpretan los textos de algunos estudiantes, quienes relacionan el término *azar* con juegos ampliamente reconocidos como

las cartas, el bingo, las loterías, el chance y aquellos utilizados en los casinos. En este tipo de juegos la casualidad desempeña un papel fundamental, en el sentido de que para ganar, en general, no puede recurrirse a una estrategia, como si puede hacerse en el caso del ajedrez; ello es interpretado en el texto: *“El azar es como la suerte nunca saber si vas a ganar”* [4]. De esta manera, la eventualidad del triunfo en la actividad lúdica es demasiado categórica en relación con el término *nunca*, lo cual ubicaría la concepción personal en un extremo del continuo de Belmonte, una situación de perfecta incertidumbre.

Es interesante observar cómo al solicitar narraciones y problemas relacionados con la causalidad, con el término *azar* en este caso, algunos textos son referidos no a situaciones y problemas tipo de los que se utilizan en clases de matemáticas sobre lo incierto, sino a los juegos de lo fortuitos como un problema de índole personal y social, a sucesos contextualizados en la cotidianidad de los sujetos. ¿Por qué estas actividades lúdicas presentan un carácter problemático? ¿Por qué la eventualidad se convierte en un desenfreno para algunos sujetos? ¿Por qué algunas personas se entregan a este tipo de juegos, aun cuando pierden gran parte de sus posesiones en ellos?

En relación a estas cuestiones, puede leerse: *“Son un problema social porque se vuelve un vicio en algunas personas, esto hace que pierdan su dinero, generando así mas pobreza”* [52]. Los casinos y otros lugares donde las personas apuestan su dinero, con la pretensión de ganar fondos, no perdurarían si no generaran utilidades pero, en general, no para los apostadores, sino para sus dueños. Sin embargo, algunos individuos continúan entregando su capital pese a las posibles consecuencias y a su deseo de detenerse en ocasiones. Puede ser que la aspiración de ganar, sentir la posibilidad de tener éxito, calme el dolor de lo perdido.

Tan grave puede resultar una mala relación con solaces fortuitas, que puede terminar alguien “(...) perdiéndolo todo” [29], hasta su propia vida: “Chivas mató al gato porque le ganó un buen juego de azar, que estaba en juego su auto y no lo iba a dejar perder y por eso lo mato” [66]. Posiblemente, obtener algo sin mucho esfuerzo, sin considerar que perder lo que se apuesta pudo haber requerido uno mayor, motive el impulso incontrolable hacia la aventura contingente, en el caso del segundo texto, con final fatal. Esta visión problemática de la incertidumbre se constituye en una fuente didáctica para el análisis personal y social del papel de las actividades lúdicas en la cotidianidad, demandando una actitud interpretativa y crítica frente a su uso. Por lo tanto, debe tenerse cuidado con el uso adecuado de los juegos de azar, como herramientas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos probabilísticos.

Se ha mencionado la necesidad de la utilización de dispositivos aleatorios que promuevan ideas en los estudiantes acerca del azar, tales como los dados. Sin embargo, debe tenerse presente el pensamiento que sobre este tipo de objetos puedan tener los estudiantes; adviértase, por ejemplo, la situación en que creencias religiosas no permitan la utilización de estos artefactos: “(...) y lo crucificaron y cuando murió empezaron a jugar y apostar sus prendas y desde ese día Dios detesta los juegos de azar” [38]. Si el Todopoderoso no gusta de estas actividades lúdicas, por lo expuesto en el escrito, entre otra posibles razones y, por lo tanto, alguien devoto a sus designios no accede a realizarlas, entonces, sería necesario recurrir a otro tipo de estrategias en las que no está presente el juego pero si la incertidumbre y que puedan ser estudiadas por los fieles.

Ahora, si por algún motivo resultara que El Señor tampoco gusta del azar, entonces, las personas que se orienten por estos ideales posiblemente no puedan acceder aun estudio matemático del fenómeno; en todo caso, se respetan las creencias religiosas y se procederá de acuerdo a ello. Debe

recordarse aquí que uno de los factores que promovieron el desarrollo de la idea de probabilidad, según Hacking (p. 50-51), fue la “impiedad”.

Reflexionar acerca de los problemas personales y sociales relacionados con los juegos de azar se constituye en un elemento formativo que permite, como se ha visto, no sólo pensar las posibilidades al lanzar un dado o una moneda, sino las diversas situaciones de la vida cotidiana. Muchas acciones, actividades y toma de decisiones, realizadas habitualmente, se basan en la probabilidad,

*en la vida cotidiana se deben llevar a cabo muchas operaciones heterogéneas, si no se actuase en base a valoraciones probabilísticas no se podría vivir... éstas (con respecto a la toma de decisiones) son tomadas sobre la base del valor de probabilidad (que tenga el sujeto). Quien quisiese proceder con absoluta seguridad, quien quisiese tener en cuenta todos los factores posibles y prever cualquier eventualidad, sería incapaz de tomar cualquier decisión (Heller, 1994:296-298).*

Es importante hacer referencia a la toma de decisiones como elemento para el estudio de la significación de los objetos matemáticos. “*La Teoría de la Probabilidad suele ser especialmente importante en situaciones en las cuales está de por medio una decisión: actuar así o asá*” (Obregón, 2007). Pero, para poder abordar un estudio profundo del significado de manifestaciones tales como: “*gracias a que pongo atención a todo me va muy bien mi probabilidad de ganar la materia es del 95%*” [174], “*(...) la probabilidad de que un avión, tenga un accidente es del 98%*” [149] y “*en el Popular #1 hubo un tiroteo en el que Juan resultó herido, 3 balas en el estómago, hay un 89% de probabilidad que muera*” [184], en las que se realiza una valoración subjetiva de probabilidad (sobre todo en el primer texto; para los otros dos escritos se consideraría que los valores no son calculados por expertos en la materia con base en estadísticas, sino asumidos subjetivamente por el estudiante) es preciso abordar cuestiones del razonamiento probabilístico como ¿Qué determina tales creencias?, ¿Cómo evalúan las personas la probabilidad de un evento fortuito o el valor de una cantidad incierta?.

Kahneman et ál. (2007), presentan resultados de investigación con respecto a los razonamientos y juicios que se realizan en situaciones de incertidumbre. Ellos argumentan que las personas se basan en un limitado número de principios heurísticos que reducen las complejas tareas de la evaluación de probabilidades y la predicción de valores a simples operaciones de juicios de valor. En general, estas estrategias son muy útiles, pero a veces conducen a errores graves y sistemáticos: sesgos y heurísticos. El estudio de estas indagaciones permitiría el diseño de situaciones didácticas para la vigilancia epistemológica en la construcción de significados de objetos matemáticos, como el *valor esperado*<sup>†</sup> en fenómenos inciertos. Sin embargo, a continuación se realizan interpretaciones relacionadas con la toma de decisiones en referencia a la percepción intuitiva de la incertidumbre, la falta de correspondencia entre sucesos reales y las correspondientes medidas, el sentido ético en las disposiciones y el papel del conocimiento para disponer frente a una situación.

En referencia a Heller, es posible interpretar cómo en la vida cotidiana se puede presentar la necesidad de tomar una decisión como ésta: *“Si tu vas perdiendo toda tu fortuna en un juego de azar q’ harías seguirías jugando hasta perder toda tu fortuna o te retirarías”* [61]. Si el sujeto de la decisión pudiera determinar con absoluta certeza la consecuencia de seguir o no jugando, sería innecesario recurrir al sentimiento sobre la incertidumbre. En todo caso, la disposición que pudiese tomar el individuo estaría mediada por la percepción particular de la situación en que se pueda encontrar, por la forma en cómo valore los posibles sucesos según la información de que disponga. En este sentido, se podría proponer que un buen desarrollo del pensamiento aleatorio podría favorecer laudos más convenientes para quien decide.

---

<sup>†</sup> También llamado esperanza matemática o valor medio de un fenómeno aleatorio.

También en la cotidianidad se podría reflexionar sobre los problemas de abusos sexuales, cuyo temor puede interpretarse en textos como:

*La violación a menores es un problema q' afecta a muchas personas en Colombia, durante los últimos años se ha dicho q' sería bueno dar cadena perpetua a los violadores, pero la ley no se interesa en esto, en pocas palabras eso quiere decir q' la integridad de las personas se encuentra al azar sin quien castigue a los corruptos violadores [68].*

En este caso, se percibe la incertidumbre de lo que puede ocurrir, si no se toman decisiones *adecuadas* frente a los posibles sucesos. Si los juicios de valor de quienes legislan en una sociedad no tienen en cuenta las referencias probabilista-estadístico de lo que está sucediendo en la cotidianidad de la personas, entonces, sus decisiones no podrían impactar favorablemente en la vida de la gente.

De acuerdo a Heller, si no se actuase con base en valoraciones probabilísticas no se podría vivir. Ponderada así la importancia de la decisión, debe reflexionarse sobre la manera en cómo se viviría, dadas las apreciaciones que se realicen sobre los sucesos. Puede ocurrir que se tomen disposiciones enjuiciables, como en el caso en el que

*dos chicos estaban disputando por ver quien se quedaba con una chica muy bonita, y uno de ellos propuso lanzar una moneda al azar, uno escogió cara pero el joven que tiró la moneda ganó y el fue y se quedó con la chica [63].*

En esta situación entra en juego el sentido ético de la toma de decisiones, en la valoración que se dé a las consecuencias de las posibles acciones cotidianas. ¿Qué tan responsable puede resultar el hecho de dejar una decisión tan importante en la vida de las personas, como son las relaciones amorosas, al designio de un artefacto aleatorio? ¿No sería más conveniente, en estas circunstancias, el diálogo entre los actores?

Otro elemento importante en la toma de decisiones tiene que ver con el conocimiento. El texto acerca de lo causal al decidir: *“Es como dejar alguna decisión importante a la suerte, a la ligera sin consultar o averiguar en pocas palabras mucha gente dice; sabes esta decisión la tomé al azar”* [9], se puede interpretar así: Si las personas no poseen o no se toman su tiempo para buscar conocimiento sobre algo que deban decidir, entonces su decisión es tomada al azar; de tal manera que la falta de conocimiento para la toma de decisiones lleva a que éstas se dejen al sino. El saber sobre algo en lo que se decide, tal vez, no excluya completamente la percepción fortuita o la naturaleza incierta del fenómeno, pero si puede reducirlas.

El conocimiento puede dar capacidad de decisión, brindar oportunidades, abrir posibilidades, los siguientes textos nos promueven tal interpretación: *“Si no estudio dejo todo al azar”* [35], *“al no estudiar se deja el futuro al azar”* [36]. Estudiar, educarse, formarse, aunque no lo garantice absolutamente, si puede representar la tenencia de opciones para la vida. Podría alguien realizar muchos estudios y no alcanzar grandes logros relacionados, personal y socialmente, con los méritos académicos, como puestos de trabajo valorados, faustos y reconocimiento. Al contrario, personas con poca preparación letrada pueden alcanzar mejores metas en este sentido. Más sin embargo, la preparación intelectual puede valorarse como un factor de desarrollo humano que posibilita, mejora las probabilidades, de tener opciones para la existencia y capacidad de decisión frente a ellas.

En relación, puede interpretarse la incertidumbre como falta de razones o intenciones para decidir frente a las elecciones. El azar *“es como elegir cosas sin saber bien cual vamos a escoger o cual nos va a salir”* [14], en este sentido, no hay un conocimiento firme que determine una conciencia de la decisión y, por lo tanto, se ve limitada la posibilidad de argumentar la escogencia. Un fenómeno se torna fortuito porque no se posee una argumentación ni una pretensión para la elección, se llega a *“escoger entre varios, sin mirar*

*cualidades, fuerza ni nada por el estilo, solo el que fue, fue*” [15]. No se genera conciencia para elegir, *“es escoger algo sin fijarse en algún detalle”* [20]. Se deja, por voluntad, las elecciones al albur, *“es donde hay muchas posibilidades y se escoge una sin razón alguna”* [24]. En estas situaciones puede decirse que se decide no elegir comprensivamente, sino que se deja a los hados lo que acontezca.

Una situación que ilustre esta concepción está dada por: *“Habían 5 sitios que visitar pero no había acuerdo entonces los anotaron en pequeños trozos de papel y así escogieron al azar a donde ir”* [43], si hubiera un concierto para pasear, podría considerarse éste como una razón, como una intensión construida entre varios, pero al disponer que el hado determinara el lugar al cual viajar se neutralizó la posibilidad de discusión, de búsqueda de una causa común. Prácticamente el fenómeno es convertido en una situación fortuita, no necesariamente tendría que serla, no es incierta por naturaleza, el sujeto por su falta de interés hacia algo la torna accidental, posiblemente quiere hacerlo así o le toca hacerlo de esa manera. En el caso, por ejemplo, cuando alguien en *“(...) el examen de inglés tenía unas preguntas que no entendía, y para no dejar el examen en blanco tachaba preguntas al azar”* [34], el sujeto no deja las elecciones al acaso, porque quiera, sino porque le toca, porque no posee la comprensión para responder, no puede justificar su elección, sin embargo, sabe que puede proceder valiéndose de la contingencia.

El signo lingüístico *suerte*, usado en el texto: *“Es como dejar alguna decisión importante a la suerte, a la ligera sin consultar o averiguar en pocas palabras mucha gente dice; sabes esta decisión la tomé al azar”* [9], connota cierta neutralidad con respecto a lo que pueda ocurrir como resultado en la toma de alguna disposición: Pueden salir las cosas bien o no, no hay una polarización valorativa con respecto al posible efecto. Pero este vocablo también puede no poseer un sentido neutro. Si se considera el texto:

*Mi hermana es una persona que todo lo deja al azar ya que ella dice que la suerte siempre anda con ella, yo creo que por estar escogiendo al azar terminó con ese novio que ni siquiera lo parece mas bien parece el hijo pero bueno si tanto le gusta ojala no la decepcione [40],*

se interpreta que, en este caso, el término *suerte* manifiesta algo positivo, genera confianza. La inferencia entrelaza aquel optimismo con dejar las cosas al albur; ¿Qué puede ocurrir?, ¿Quién sabe?, ocurrirían cosas buenas, ya que hay suerte. Sin embargo, la escritora, desde su propio prejuicio, culpa al hecho de que su hermana escogió fortuitamente el haber dado con un novio más joven que ella. Pero, finalmente, devuelve la situación al acaso: *“ojala no la decepcione”*.

El término *suerte* puede relacionarse, entonces, con una significación intuitiva de los sucesos que tienen que ver con el azar y la probabilidad (Batanero, 2005). En estos casos expuestos se puede interpretar dos significados personales, referidos por el signo lingüístico. De una parte, la sola palabra connota algo positivo, deseado, esperado por quien usa el vocablo. Por otro lado, su uso es neutro en el sentido de que no expresa algo bueno o malo, deseado o indeseado, esperado o inesperado; de aquí que debiese ir acompañado de otras voces como *buena suerte* o *mala suerte*.

Frente a la adversidad y la incertidumbre de los sucesos, alguien puede percibir la eventualidad con temor. El *“azar es un término utilizado cuando te encuentras en dificultad, con miedo, desesperación, asustado de algo y cuando crees que algo está malo o bueno, es como una expectativa al saber si, si es cierto o no”* [28]. Frente al desconocimiento de lo que pudiese acaecer, en este caso, se manifiesta una sensación incontrolable de sobresalto que llena el espacio y el tiempo de causalidad y destino. Tal vez el vocablo resulte forzado en el siguiente texto pero, aún así, contextualiza la sensación de la fatalidad como algo angustiante:

*Cuando nos fuimos a venir a Medellín fue todo de improviso de un momento simultaneo, lo cual somos desplazados y aquellas personas que hicieron esto nos estaban buscando y nosotros nos escapamos y nos venimos al escondido. Sentía azar porque en el momento que veníamos, escondidos dentro de un furgón, sentía que ya nos iban a encontrar aquellas personas y nos harían males a nuestra familia, lo cual era muy probable [45].*

En este escrito se interpreta que el significado del vocablo se manifiesta en el sujeto como la imposibilidad de conocer la situación o de controlar lo que puede suceder y el acontecer podría afectar psicológica o físicamente la integridad de la persona; es claramente desentrañado el azar como miedo, desesperación y, aún, como angustia.

En contraste a la percepción de miedo frente al azar, podría tenerse la actitud de *“dejar que todo transcurra sin preocuparnos y sin importar”* [16], al afrontar las situaciones inciertas, indeterminadas, que no pueden controlarse. Una actitud en la que al considerar que no puede cambiarse algo, entonces, ¿para qué molestarse?; el azar como fatalidad, como acontecimiento inevitable. ¿De qué dependería una posición de miedo o de tranquilidad frente a las situaciones concebidas causalmente? Se interpreta, de acuerdo a las líneas anteriores, que el sujeto experimenta la situación azarosa dependiendo de su subjetividad, de su percepción de lo que puede ocurrir. Si lo están buscando, el hecho de que lo encuentren puede percibirse con miedo, si al encontrarlo le pudieran hacer daño; podría percibirlo con rabia, y más le convendría a quien lo busca no encontrarlo; o podría percibirlo con tranquilidad si se está jugando, por ejemplo, escondidillas; o hasta con alegría, si lo están buscando para darle un regalo deseado.

Con respecto al desarrollo pensamiento aleatorio y, en particular, de la idea de azar, estudiada gracias a Fischbein y Piaget e Inhelder en el Capítulo I (p. 28-30), los estudiantes participantes de esta investigación, posiblemente, se encuentren en el estadio de las operaciones formales (un estudio de carácter

cognitivo y más individualizado podría permitir caracterizar con mayor propiedad el nivel de desarrollo real de los sujetos). En este estudio, sin embargo, se puede conjeturar, interpretativamente, elementos con respecto a este proceso.

Si un estudiante manifiesta: *“no tengo muy claro que es azar”*, no necesariamente implica que no reconozca fenómenos aleatorios en los cuales no es posible predecir posibles resultados; por ejemplo, al cuestionársele si mañana va a llover o no, es posible que asuma la situación como incierta, lo que mostraría cierta noción de azar; en otras palabras, que alguien no logre manifestarse verbalmente, con respecto a un término, no puede interpretarse, ineludiblemente, la ausencia de significados personales internos acerca de lo que el vocablo pueda referenciar.

De otra parte, si un educando expresa: *“yo entiendo por el término azar todos los juegos con que uno se divierte como cartas, dominó, ajedrez, parkés y otros mas”* [2], tal vez el término sólo esté referenciado como un adjetivo relacionado con un tipo de situaciones lúdicas, sin el significado de fenómenos sometidos al indeterminismo. La situación expresa en: *“Si Carlos va al casino toda la semana y cada día gana \$900.000, ¿cuánto ganará en el mes?”* [57], ejemplifica esta situación, ya que en el texto se presenta un problema determinístico relacionado con juegos de casino, juegos de azar (éste como simple calificativo). En general, resultaría poco probable, en esta investigación, suponer un limitado estado de desarrollo del pensamiento aleatorio de acuerdo a la interpretación de textos como los anteriores.

De otro lado, sí se pretende interpretar situaciones que presuponen el transcurso a cierto nivel de desarrollo cognitivo con respecto a la idea de azar. Cuando se manifiesta que en *“un juego de parkés, he entrado dos fichos y mi adversario 3, quien ganará?”* [51], las acciones operatorias realizables, como determinar las cantidades de fichas de cada jugador o la numeración de los

espacios que faltan para llegar a la meta de cada una, no establecen para el sujeto la posibilidad de determinar el ganador; se aprecia un buen estado en la construcción de la idea de probabilidad como síntesis entre lo operacional y el azar<sup>‡</sup>. También, en la referencia a la probabilidad como: “(...) *una hipótesis que intenta predecir cual posibilidad del azar es la más posible de ser escogida*” [146], se vincula lo cuantitativo-operacional (“la más”) y la incertidumbre que establece el albur (la posibilidad no absoluta de llegar a ser algo, ser sólo hipótesis, y las diferencias en las posibilidades de cómo serlo); de tal manera que es estimulada una interpretación de un alto grado de desarrollo del pensamiento estocástico con respecto a la concepción probabilística.

En relación a la construcción de la noción de probabilidad se pueden interpretar, en los textos de los estudiantes, obstáculos para el aprendizaje. Establecidos por Brousseau (1983), citado por Serradó et ál. (2005), como aquellos conocimientos que han sido, en general, satisfactorios para adaptarse a ciertas situaciones durante un tiempo y que por esta razón se fijan en la mente de los sujetos, pero que posteriormente resultan inadecuados y difíciles de acomodarse frente a nuevas realidades. *“Un conocimiento puede ser considerado como obstáculo cuando es elaborado como fruto de la interacción del alumno con su medio y, en esa situación, produce un resultado ‘interesante’ y ‘útil’, aunque no válido ni adecuado”*. Estos obstáculos pueden determinarse a partir de la revisión de las investigaciones sobre el aprendizaje de las nociones y significados de los objetos de conocimiento.

Un conocimiento válido institucionalmente con respecto a lo aleatorio lo determina el hecho de que diferentes sucesos en un fenómeno, que está sometido al azar, no necesariamente tienen que tener la misma posibilidad de ocurrencia. Cierta obstáculo es llamado Sesgo de la Equiprobabilidad (Lecoutre y Duran, 1988, citados por Serradó et ál., 2005) si los sujetos

---

<sup>‡</sup> Ver la probabilidad como síntesis entre lo operacional y el azar (p. 30)

consideran equiprobables los posibles resultados de cualquier fenómeno que sea materia de lo fortuito. Este conocimiento obstructor se interpreta en el texto *“es como tener todo por igual”* en el que se determina la misma valoración de accidentalidad. Por el contrario, este obstáculo, tal vez, no esté presente en la concepción en la que la probabilidad *“es una hipótesis que intenta predecir cual posibilidad del azar es la más posible de ser escogida”* [146], ya que se establece la eventualidad de no considerar todas las opciones bajo las mismas cuantificaciones subjetivas de acontecimiento.

En la situación, planteada por un estudiante, en la que *“un carro viaja 3 días. Cada día gasta \$600.000 de gasolina y tiene que viajar 7 días ¿Probablemente cuánto gastó en gasolina en los 7 días?”* [182], puede interpretarse un uso demasiado forzado del término ‘probablemente’ o, también, podría considerarse un obstáculo en el que la complejidad de la situación, para el sujeto, le genera un estado de incertidumbre que no le permita establecer adecuadamente la relación causa-efecto intrínseca en el problema y, por lo tanto, le asigne la situación al azar.

Es posible evidenciar, interpretativamente, la concepción de Fischbein (p. 30) en la que el desarrollo de las nociones sobre el azar no es espontáneo y, por lo tanto, es necesaria una educación probabilística. Se puede escuchar en la cotidianidad que un producto de limpieza elimina el 99.99% de la bacterias o que la probabilidad de que el país salga de la pobreza, al votar por un candidato en particular, es del 90%. Estos enunciados no caracterizan el sentido de incertidumbre frente a las situaciones, más bien podrían referir un sentido de convicción, de determinación frente a los sucesos. Esta línea de pensamiento podría promover enunciaciones como: la probabilidad *“es el porcentaje o certeza de saber algo o si perdiste o ganaste algo”* [152]; en el que se puede considerar el valor porcentual explícito en una situación como un indicativo de validez absoluta, no probable. Por lo tanto, se considera necesario desde la escuela, y gracias a la educación estocástica, promover un

desarrollo de pensamiento que posibilite a los sujetos la interpretación de muchos fenómenos cotidianos desde un marco de referencia caracterizado por la contingencia de los acontecimientos y no por su inescrutable necesidad.

Ahora, con respecto a los significados institucionales del término *azar*, establecidos en el estudio epistemológico realizado en el Capítulo II (aparte 2.2.), a saber, CAUSAS DESCONOCIDAS: fuerzas incontroladas de origen mágico o divino; RELACIÓN CAUSALIDAD Y AZAR: Causas vs Azar, o éste como “causa”, y Todo tiene una causa (El azar es la medida de nuestra ignorancia y El tratamiento que se dé a éste como conocimiento), pueden interpretarse significados personales en los textos de los estudiantes.

El azar se relaciona con causas desconocidas, de origen mágico o divino, de tal suerte que se constituye en un supresor de la posibilidad de que el ser humano pueda influenciar, gracias a su voluntad, su inteligencia o su conocimiento, en la toma de ciertas decisiones o el destino de su vida; además, si la probabilidad se relaciona con las posibilidades que tiene un suceso de ocurrir, entonces, en el texto:

*Su mamá se iría hacer unos exámenes porque había una probabilidad de que se le detectara un cáncer que si no se le trataba con tiempo podría hasta llegar a fallecer pero su maestro le dijo que solo era una probabilidad algo no muy seguro que tuviera fe en que Dios no permitiría que a su madre le pasaría algo tan penoso ella se fue para su casa un poco mas tranquila. Al otro día llegó directo donde su maestro y le contó que gracias a Dios el examen le salió negativo y muy feliz continuó estudiando [164],*

se interpreta el uso del término *probabilidad* con relación a la incertidumbre, o la influencia del azar, frente a lo que pudiese acontecer con la enfermedad. Sin embargo, el primer empleo manifiesta temor y no determina una valoración cualitativa o cuantitativa de posibilidad de darse el mal. En el segundo, se confiere, sin ningún motivo, mas que el de dar esperanza, un valor pequeño a la posibilidad. Además, en la situación la “causa” del acontecimiento resulta incontrolada, sólo basta esperar lo que ocurra, por lo cual la influencia

divina es solicitada a favor del anhelo. En este sentido, Dios es la “razón” por la cual no se presentó el suceso, gracias a Él no ocurrió en este caso.

Se considera que en el texto: *“Hace algún tiempo por culpa de los juegos de azar había perdido toda su fortuna una joven”* [28], no puede interpretarse el significado de contraposición entre causas y azar, o éste como “causa” de aquellos sucesos que no pueden ser explicados mediante fuentes convincentes. El albur, per se, no es la “causa” de la pérdida, como si puede serlo una mala relación personal con los juegos sometidos a la causalidad. En el siguiente texto se reconoce la culpa de quienes actúan dejando las cosas al albur, y no por éste mismo: *“Muchas veces por nosotros escoger al azar respuestas de exámenes del colegio o decisiones al azar podemos obtener una mala nota o un problema”* [71]. En cambio, en el texto: *“Cuando estamos jugando cartas las repartimos sin saber que nos va a tocar, todo ahí queda como al azar o la suerte de uno”* [44], se interpreta el hado como la “causa” de lo que acontece, en este caso, de lo que le toque a una persona luego de barajar y distribuir el juego; no hay forma de que se obtenga precisamente lo que se quiera, a no ser por casualidad.

En ninguno de los textos de los estudiantes se interpreta, directamente, la idea de que *todo tiene una causa*. Sin embargo, sí puede referenciarse que frente al desconocimiento de las razones o principios de algo se recurra al albur. En el escrito: *“Si no sabe lo que significa una palabra, su utilización queda al azar”* [64], se interpreta la eventualidad implicada por la falta del saber. Al no conocerse el uso significativo de un término, su manejo se torna casual, la ignorancia implica la accidentalidad. Pero se considera que, en casos como este, está la posibilidad de no recurrir directamente al acaso, sino de acudir a la opción de aprender antes de actuar. En el pasaje: *“Es como dejar alguna decisión importante a la suerte, a la ligera sin consultar o averiguar en pocas palabras mucha gente dice; sabes esta decisión la tomé al azar”* [9], la interpretación del uso del término tendría que ver con la toma de decisiones a

la suerte, porque, quien decide, así lo asume, aunque puede tener otras opciones.

Más allá, en esta relación entre azar y conocimiento, al tomar una decisión apresurada, sin buscar información, sin un conocimiento que la oriente, se podría hacer referencia a una significación personal concerniente a aquella idea, denominada por Azcárate (1995) como *el Discurso de la Ignorancia*, pues es producto de la oscuridad del entendimiento humano a la hora de analizar ciertos fenómenos. No hay azar realmente, no existe en sí mismo, es la ignorancia lo que hace recurrir a él. Se diría que **PARA DIOS NO EXISTE EL AZAR**<sup>5</sup>.

De tal suerte que si aquél que toma una decisión no lo hace “*a la ligera*”, sino que se toma su tiempo, consulta, averigua, busca algún tipo de conocimiento relacionado con aquello sobre lo cual debe decidir, entonces, la decisión se encontrará en otro nivel de significación frente al azar, en otra concepción frente a éste: la posibilidad de incidir en los fenómenos establecidos por la causalidad. El tratamiento que se dé a un fenómeno sometido a la eventualidad avisará sobre el conocimiento que se posea de ésta. Para ejemplificar esta otra posición pueden considerarse los textos: “*Si no estudio dejo todo al azar*” [35] y “*al no estudiar se deja el futuro al azar*” [36]. Se interpreta, más allá de considerar los sucesos sometidos simplemente a la incertidumbre total, cómo el sujeto puede tomar decisiones y actuar con la posibilidad de incidir en lo que posiblemente acontezca. Tomar la decisión de estudiar, hacerlo, permite al sujeto obtener posibilidades de las que, tal vez, carece en caso de no actuar.

---

<sup>5</sup> En “Escritos Varios” Edwin Montoya, sin publicar.

### 3.3. ACERCA DE LA ALEATORIEDAD

*Mis dibujos inspiran, no se definen. No determinan nada.  
Ellos los colocan en el ambiguo mundo de la  
indeterminación. Se trata de una especie de metáfora.*

**Odilon Redon**

El término *aleatoriedad* es el menos reconocido entre los estudiantes. Algunos manifiestan no haberlo escuchado; otros, aunque lo hayan escuchado, afirman no saber qué significa o no escriben textos haciendo uso de él. Podría pensarse que este término no es muy usual en la cotidianidad, que tendría un carácter más especializado o técnico, en las ciencias, la tecnología y la filosofía.

Ahora, al comparar los significados personales, interpretados en los textos de los estudiantes, con los significados expuestos en el estudio epistemológico del segundo capítulo (aparte 2.3.), se establecen relaciones interpretativas entre lo referenciado y la ALEATORIEDAD, como EQUIPROBABILIDAD, y su relación con el PRINCIPIO DE INDIFERENCIA, los ACONTECIMIENTOS de las CIENCIAS NATURALES y de la VIDA COTIDIANA; así también, con la concepción de KYBURG sobre lo aleatorio.

El texto *“es como tener todo por igual”* [85], bastante abstracto por cierto, puede relacionarse con los textos: *“Creo que es la manera en la cual se elige una posibilidad en el azar”* [91], *“es también escoger o elegir sin precisar bien lo que nos tocará o lo que nos saldrá”* [90] y *“es donde hay muchas posibilidades y se escoge una sin razón alguna”* [24]. Esta relación arbitraria se realiza en los siguientes términos: Frente a una situación, en la que se elige entre varias opciones, el sujeto que toma la decisión puede tener cierta inclinación hacia alguna o algunas de las posibilidades o podría no tener razón para hacerlo,

caso en el cual, todas las opciones serían igualmente valoradas por él y la realización electiva indiscriminada resulta efectuada bajo la eventualidad. Lo cual correspondería al principio de indiferencia, interpretado como si en las situaciones en que no haya razones evidentes para inclinarnos por una posibilidad, todas las opciones son igualmente válidas (p. 44).

De acuerdo a lo anterior, se puede interpretar varias de las situaciones que son textualizadas por los jóvenes escritores como aleatorias. El texto *“lanzar una moneda”* [98] expresa, posiblemente, una situación en la cual las opciones puedan ser valoradas como iguales, ¿Cuál podría ser más opcionada, la obtención de cara o de sello y por qué? En el caso en que alguien manipule la situación de tal manera que consiga lo que desea en algún lanzamiento, entonces, dejaría de ser aleatoria. ¿Podría alguien determinar siempre lo que se obtendría al lanzar una moneda al aire, sin alterar la situación a favor? Lo mismo, en este sentido casual, en el caso *“cuando se inicia un torneo de ajedrez de más de 50 personas se utiliza la aleatoriedad para formar los encuentros”* [103]. Tal vez, al inicio del torneo, no haya razones para que dos participantes, en particular, queden juntos y, por lo tanto, todas las parejas serían igualmente posibles.

Algunos estudiantes relacionan el vocablo con cosas que giran: *“Entendí que es un objeto o cosa que gira”* [75], *“es girar (...)”* [76]. *“Para mí es algo en círculos”* [77]. ¿Por qué habrá tanto hincapié en este sentido? ¿Será, tal vez, por la referencia a cosas cotidianas como las ruletas o los dispositivos de sonido que reproducen CD´s o DVD´s, los cuales giran durante el proceso? El texto de uno de ellos se propone ejemplificar, al menos, dos de esas cosas que giran: *“Es algo que se mantiene en constante movimiento como los electrones en su órbita, o como la tierra que se mantiene en constante movimiento. Giratorio.”* [78] ¿Podrían ejemplificar adecuadamente eventos aleatorios estos fenómenos?

Algo que gira no necesariamente tiene el carácter de aleatoriedad en el sentido de impredecibilidad. Existen movimientos circulares bastante determinados en estudios de la Física. El movimiento de la tierra alrededor del sol presenta características, en cierta medida, predecibles, aunque también puede consultarse sobre aspectos no determinados en el movimiento de los planetas, en general. Por lo demás, el movimiento aleatorio de los electrones sí se esgrime para explicar algunos fenómenos como el ruido, que aparece en los sistemas físicos ocasionados por fluctuaciones espontáneas o como el movimiento browniano de los electrones libres dentro de un resistor (observado en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido).

Si se exhibe el juego de la ruleta, al considerar la aleatoriedad en algo que gira, podría pensarse en una situación en la que el resultado del juego, al lanzar la bola, es impredecible, a no ser que el dispositivo esté arreglado. También algunos mecanismos de sonido tienen la característica de reproducir aleatoriamente, bien se describe ello en el texto: “Mi mamá me regaló un mp4 y hay la música se puede escuchar normal como está en la lista de música o aleatoriamente” [108]. Puede considerarse que el sujeto que refiere las dos formas en que puede ejecutarse el artefacto reconoce, de una parte, un orden preestablecido y, de otra, uno diferente determinado por el reproductor, ¿quién sabe cómo? De lo que puede darse cuenta el individuo es que es otra ordenación y que resulta arbitraria. Se podría concluir, de estos dos párrafos, que no todo lo que gira es aleatorio, ni todo lo aleatorio se presenta en situaciones de giro.

*“La entiendo como algo que está pasando de vez en cuando, algo que puede ocurrir” [79], o es algo “que sucede muy seguido” [80]. Sí, de acuerdo, los sucesos aleatorios acontecen en la realidad y son percibidos. Así mismo, nos resulta interesante observar como en algunos eventos, que pueden ocurrir aleatoriamente, ciertos textos de los estudiantes, al referirse a la idea de orden, contraponen concepciones. “Según lo poco que he escuchado es algo que*

*indica continuidad que se hace en el orden que se ha establecido” [81], “(...) es algo rutinario” [76]. En oposición, “es como coger las cosas en desorden, uno coger los números de 1 al 20 y cogerlos todos pero en desorden” [89]. Aunque este último escrito nos puede resultar más aproximado al pensamiento aleatorio -en los primeros, las ideas de *orden establecido* y *rutina* riñen con la asumida concepción de aleatoriedad- el hecho de escoger en desorden algunos números no garantiza que la elección sea aleatoria y, por ello, pueden encontrarse numerosos trabajos matemáticos sobre números y procesos aleatorios en los que es necesario tratar de establecer un aparente, difícilmente definitivo, estado de ausencia de propósitos, causas u órdenes.*

Posiblemente, aunque el uso del término *aleatoriedad* resulte forzado, además de las implicaciones éticas, sociales y culturales que pueda acarrear, la significación de la palabra en el siguiente texto puede interpretarse como la existencia de razones para considerar las opciones como valoradas, si no por igual, al menos sí con la dificultad para inclinarse por alguna de ellas:

*Quando yo tenía un novio, lo quería mucho y al parecer el también... pasaron dos meses y según el me quería, pero a los tres días de haberme dicho esto lo encontré con otra persona y no precisamente hablando. Al día siguiente el fue a mi casa buscándome diciéndome que me quería y mucho pero que con aquella otra persona sentía lo mismo. Él sentía aleatoriedad porque nos quería a las dos y aunque no es posible se quería quedar con estas dos mujeres [107].*

Interpretando la situación, podría percibirse la confusión que experimentaría alguien que siente deseo de permanencia con otras dos personas en razón amorosa. Ante el precepto de monogamia, que bien reconoce la autora del texto, la elección resulta muy difícil y para el muchacho aleatoria, en el sentido de tal desconcierto.

Es interesante observar como tres estudiantes vinculan *aleatoriedad* con repartir publicidad a las personas a través de impresos.

*Cuando voy por la calle, que veo los chicos que aleatoriamente reparten sus volantes sin importarles raza ni color me da alegría ver que hasta en los trabajos mas humildes existe gente que respeta la diferencia y el ser único [97].*

*A mí me llama la atención; las personas q' exponen sus vidas al sol y al agua repartiendo volantes aleatoriamente para ganarse un peso para su familia, para comer y darle estudio a sus hijos [96].*

*Dar volantes en el centro en forma aleatoria porque la gente pasa muy seguido [95].*

En el primer texto, *aleatoriedad* se interpreta en relación con la concepción de equidad hacia las personas, de tal manera, que la no discriminación establece el criterio de igualdad para realizar un reparto aleatorio. En los otros dos textos la significación, en el uso del término, tal vez se aproxime a la del primero: se reparten volantes indistintamente, sin importar a quien se le entreguen. Aunque, además, se podría cuestionar si cuando se reparte algo, de mano a mano, las elecciones de la entrega son totalmente indiferentes.

En el escrito *“desplazarse aleatoriamente entre lugares, porque toca”* [100], se puede interpretar una situación en la que, al tener que irse de un lugar a otro, posiblemente indeterminado o determinado, pero con las implicaciones que el destierro pueda dejar, se genera una sensación de incertidumbre. En este sentido, también, se puede percibir la situación de violencia que afecta algunos espacios de los estudiantes de acuerdo a sus textos: *“Un día hubo una confrontación entre dos bandas de Medellín y hubo tiros aleatoriamente, de corrido, no paraban de disparar; pero por fortuna llegó una gran tropa de la policía y finalizó esto”* [118]. Cuando se dispara un arma es posible que la bala llegue a lugares no predeterminados por quien acciona el gatillo blandiendo indiscriminadamente la boca de fuego, así hiera o asesine a alguien no inmiscuido en el conflicto (balas perdidas en el argot cotidiano), lo cual genera, claramente, una sensación agobiante de inseguridad, al poder perderse la vida.

En forma similar, en el texto: *“Hoy en día las personas no pueden caminar aleatoriamente ya que en los barrios y cuadras se ha visto mucha violencia ya prohíben pasadas de un lugar a otro”* [115], se interpreta una ruptura de la igualdad en las valoraciones frente a las elecciones ya que, al caminar, los potenciales caminos, independientemente de las intenciones del caminante de llegar a algún lugar en particular, no tienen la misma posibilidad de ser recorridos.

En algunas situaciones, como en la asignación de roles en un juego, los niños y jóvenes recurren a cantinelas para realizar asignaciones o escogencias en forma no deliberada. Es el caso en el que *“un joven fue al casino y no sabía en cual máquina apostar o jugar y decidió escoger de una manera aleatoria y lo hizo por medio del tin mare de don pin güe tutara manga esta maquina fue”* [106]. Se propone interpretar el hecho de que, si un sujeto no reflexiona sobre la posibilidad de controlar la cantidad de sílabas de la cantinela y el número de objetos o personas sobre las cuales establece la relación uno a uno, el resultado puede asumirse como no controlado, no predecible. Este podría constituirse en un caso de existencia de incertidumbre debido a la falta de conocimiento del sujeto.

El aspecto subjetivo de la aleatoriedad, en la concepción de Kyburg (1974), explicada por Batanero y Serrano (1995:18), como:

*si un objeto es o no considerado como miembro aleatorio de una clase, depende, en esta interpretación, de nuestro conocimiento sobre el mismo. Lo que puede ser aleatorio para una persona puede no serlo para otra. La aleatoriedad no es una propiedad física ‘objetiva’, sino que tiene un carácter ‘subjetivo’,*

se interpreta en el texto: *“Yo relaciono la palabra aleatoriedad como casi lo mismo que la palabra azar, me suenan familiares porque la palabra aleatoriedad tiene como raíz la palabra aleatorio y aleatorio es un sinónimo de azar quedaría todo casi lo mismo como si todo fuera como a la suerte o como si las cosas cambiaran depende de la persona”* [92], ya que algo puede

considerarse de naturaleza aleatoria o azarosa por alguien, desde su concepción, pero no así por otro más, por ejemplo, la interpretación de escogencia de los números del 1 al 20 en desorden. Si una persona posee intenciones, razones o conocimiento frente a un fenómeno, entonces, los sucesos no los atribuye al azar. Saber que los números desorganizados no necesariamente representan aleatoriedad. Por el contrario, el albur rescata de la nada del saber a algunos cuando se preguntan por lo acontecido. De tal manera que ellos viven fuertemente la contingencia y otros en un menor grado, "(...) *depende de la persona*" [92].

### 3.4. ACERCA DE LA PROBABILIDAD

*La vida es una escuela de probabilidad.*

**Walter Bagehot**

El término *probabilidad* es ampliamente usado por los estudiantes en sus textos. Se refieren a percepciones de posibilidad junto con valoraciones subjetivas y cuantitativas de las mismas; también lo relacionan con saberes, verdad, probatorias, certeza, dudas, ganancias o pérdidas, oportunidades, esperanza, gustos por algo. Además de presentarlo en muchas situaciones de la vida cotidiana.

La palabra *probabilidad* es relacionada con el término *posibilidad*.

*“Es que dice cuán posibilidad habría de algo. Creo que las palabras posibilidad y probabilidad son sinónimas, esta palabra la he escuchado mucho, no obstante no se como identificarla en el momento de la respuesta. Un ejemplo sería en una clínica que el doctor le diga a los familiares ‘la probabilidad o la posibilidad de que su hijo se salve es nula’ ” [145];*

de forma que se tendría el mismo significado para los dos términos. Más allá, se puede observar otra relación: *“la probabilidad es la posibilidad de que algo ocurra o que pueda suceder, que se puede interpretar con números” [125];* es la *“posibilidad de que esté pasando algo” [127]; “es como decir: puede ser, de pronto pudo haber sido” [143].* El término en cuestión establece condición de posibilidad, determina la existencia o no de la misma y -en el texto [125]- se considera la ocasión de cuantificar esa circunstancia.

En tal sentido, hay referencia a cosas que pudieron, pueden ahora o podrán suceder; la incertidumbre habita en el pasado, el presente y el futuro:

*“El año pasado cuando nos dijeron que existía la probabilidad de que algunos no pasaran al SENA a todos nos dio una pequeña sensación de miedo y ansiedad ya que todos queríamos estar en la media técnica” [162].*

Se interpreta cómo en esas indicaciones temporales, el término *probabilidad* puede significar, personalmente para alguien, una relación directa con las posibilidades de acaecimiento de los sucesos. En el caso, expreso por el estudiante en este último texto, habría dos posibilidades: estar o no en la media técnica. ¿Quién sabe qué posibilidad percibiría él o ella como más probable? Lo que sí se podría interpretar, con más acercamiento, es que su deseo de estar en la media técnica es mayor que el de no estar y que ello determina una cuantificación subjetiva de la posibilidad. De otra parte, una valoración cuantitativa de las posibilidades podría animar o desanimar mucho las sensaciones del sujeto, pero se lograría menor nivel de incertidumbre. Dígase, por ejemplo, que se le señalara al estudiante que la probabilidad de

hacer parte de la media técnica es del 80%; tal vez, sus sensaciones serían muy diferentes si el pronóstico fuera del 20%.

Una percepción subjetiva de la probabilidad, como sensación de mayor o menor posibilidad de que algo suceda, es interpretada en el texto:

*Para nadie es un secreto el sufrimiento q' tienen las familias de los secuestrados, incluso ellos mismos, ya q' hay personas inescrupulosas y tan duras de ♥ q' son capaces de quitarles la libertad y la felicidad a otras personas y a ellas mismas igualmente. Lo bueno es que ahora todos ellos tienen la probabilidad de ser libres e igualmente los integrantes de las fuerzas armadas revolucionarias de Colombia (FARC) Los colombianos esperamos q' todos los q' están privados de la libertad vuelvan [163];*

ya que, tal vez, los sucesos actuales de liberaciones voluntarias, estrategias militares de liberación, desmovilización de guerrilleros y oportunidades para los desmovilizados, propuestas por el Gobierno Nacional, incentivan en el estudiante una percepción positiva frente a la situación de los secuestrados.

Dada la incertidumbre en la posibilidad de ocurrencia de sucesos - pasados, presentes y futuros- se percibe un sentido de esperanza en varios textos:

*En nuestra comuna 3 se presenta muchos enfrentamientos entre las pandillas, lastimosamente han muerto muchas personas a causa de este problema, la única probabilidad es q' las autoridades vivan más pendientes de la comunidad [193].*

*Existe la probabilidad de q' muy pronto salga de estudiar y consiga un buen trabajo para salir adelante y sacar a mi familia adelante [158].*

*Erase una vez dos jóvenes muy soñadores y siempre se mantenían juntos cuando crecieron uno de ellos cambió y le dijo al otro eres un tonto por creer en cosas que no se harán realidad. Y él dijo pues probablemente se harán realidad. Pero el otro dijo no creas en cosas innecesarias. Tiempo después el joven soñador se encontró al otro y le dijo. Pues amigo se me hicieron realidad y usted por no soñar se quedó pobre por siempre [177].*

En el caso de la violencia entre pandillas, existen las posibilidades de que el conflicto siga o no, pero al escritor afirmar que *“la única probabilidad es q’ las autoridades vivan más pendientes de la comunidad”* [193], se percibe la probabilidad con el sentido de esperanza, de que el conflicto no continúe, aunque se recurre sólo a la alternativa de la fuerza pública. Más aún, se podrían tener los dos términos como sinónimos: *“A veces nos encontramos en problemas y es muy difícil solucionarlos, pero tenemos esa esperanza de que alguien o algo nos ayude y podamos superarlos. Entonces sería como reemplazar la palabra esperanza por probabilidad”* [141]. Similarmente, en los casos de ayudar a la familia y lograr los sueños, se tienen dos sucesos eventuales, que se logre lo deseado o no y la significación de la probabilidad se atribuye a la deseada, a la esperada por el sujeto.

Otro término utilizado en algunos textos, un poco similar a *esperanza*, es *confianza*:

*“Un profesor estaba desconfiado de que un estudiante ganara una evaluación, pero otro docente le dijo -uno no sabe, existe una gran probabilidad de que ese joven logre ganar ese examen-”* [199];

*“la lotería es un gran problema, un juego de azar donde la probabilidad juega, y en el que cientos de personas depositan toda su confianza, para luego decepcionarse, por eso no se debe comprar”* [201].

Con respecto a esta significación, se podría pensar que la *confianza* representa una valoración subjetiva de la probabilidad, fundada, en la experiencia (dable para el docente que no confía en su estudiante) o en la esperanza (viable para el otro maestro), pero en ambos casos basada en posibles actuaciones de los sujetos; no así en el caso de la credibilidad relacionada con la *confianza* depositada en ganar la lotería, la cual puede estar fundada más en el conocimiento de la poca posibilidad de acertar un número y que, factiblemente, motive al escritor a sugerir que no se juegue.

La posibilidad de ocurrencia de un suceso es aquilatada en textos de los estudiantes mediante valores numéricos, “(...) *se puede interpretar con números*” [125], o con cuantificadores gramaticales, es una incertidumbre “medida”. La escala de “medición” puede ir de 0% a 100% o de nada a todo. En los siguientes textos de los estudiantes puede observarse la manera cómo se realizan, así, valoraciones:

*Si eso siempre se ve en todas las materias ya que para mi probabilidad es un porcentaje de algo por ejemplo cuando califican en una materia entonces que esta cosa tiene 20% y que la otra cosa tiene 80% entonces tiene cierta probabilidad como de ganar como de perder [151].*

*Un ejemplo sería en una clínica que el doctor le diga a los familiares ‘la probabilidad o la posibilidad de que su hijo se salve es nula’ [145].*

*María es una joven de 18 años es una chica extrovertida que le gusta mucho salir con sus amigos, a ella le encanta bailar y en una de esas noches loca tuvo relaciones con un joven q’ conoció, al otro día estuvo con su novio... al cabo de 4 meses se empezó a sentir mal y su amiga Patricia le preguntó María q’ tienes y ella le dice no se algo me cayó mal tengo ganas de traspasar y me duele la cabeza Patricia le pregunta últimamente has dormido mucho y hay una probabilidad muy alta de que estés embarazada. Ven vamos a hacernos una prueba. La cual salió positiva, María llorando recibe la noticia Patricia le pregunta quién es el padre. María le dice no lo se estuve con dos hombres el mismo día. María te tengo la solución pues para mí hay un porcentaje del 50% q’ sea de tu novio o de otro, q’ voy hacer... no se habla con ellos y se hacen una prueba de ADN y salen de la duda y hay no tendrán dudas porque la probabilidad de que falle es casi nula [142].*

*Un día un niño hijo de la modelo Catalina y del millonario Doctor Ricky salió a dar un paseo con su patineta nueva. Y en el parque se encontraba un niño muy pobre y lo humillaban mucho en especial el niño rico un día se cayó de su patineta nueva y lo llevaron a un hospital y el papá preguntó cual es la probabilidad de que mi hijo quede parálítico? Y el doctor dijo –es de un 100%. Luego el niño al ver que no podía caminar cambió su forma de ver el mundo y se volvió humilde [178].*

En estos escritos se interpretan los significados atribuidos a los valores numéricos y a las expresiones verbales para cuantificar valoraciones de probabilidad. Cuando el estudiante manifiesta que se obtiene, respectivamente, según el orden del escrito, una calificación de 20% y otra de 80% “como de

*ganar como de perder*”, se podría percibir una inclinación más hacia la reprobación que hacia la aprobación de una materia, pero puede ser un orden arbitrario de ordenamiento, por lo que esta interpretación es sólo posible. Las expresiones que manifiestan una probabilidad nula de que la vida de alguien se salve o una del 100% de que alguien no pueda volver a caminar, se interpretarían como no adecuadas en casos reales. Una “probabilidad nula” o una “probabilidad absoluta” de que algo ocurra no se interpreta en el sentido de la imposibilidad ni de la certeza absoluta, ellas serían tan sólo hipótesis<sup>\*\*</sup>; por ello, otras expresiones como: *hay poca probabilidad de que sobreviva* o *es probable que no vuelva a caminar*, aunque son sólo probabilidades y muchas cosas pueden suceder, serían más apropiadas.

En el escrito acerca de la situación del embarazo, la valoración de una probabilidad muy alta de estarlo, en este caso, se basa en los síntomas que presenta alguien, ya que, en otros casos, tales indicios han coincidido con el diagnóstico. Ahora, tal vez, la valoración de *muy alta* se logre sólo con la prueba de embarazo, dígase con aquellas que se consiguen en droguerías, pues éstas presentan tan sólo un valor de probabilidad de acertar. También se interpreta como acertada la valoración del 50% de posibilidad paterna, ya que si la prueba de ADN, para la cual también se proponen condiciones de validez (recolección y manipulación de la muestra, análisis de la muestra en laboratorio y comparación de perfiles genéticos, valoración estadística de los resultados, emisión del informe), difícilmente puede fallar, nos parece apropiada la valoración de *probabilidad casi nula* (no nula) asignada a la prueba, ni que decir de una percepción subjetiva que asignara valores diferentes. Ahora, si los dos hombres fuesen gemelos, la situación casi se quedaría en ese 50% y -para empeorar las cosas- piénsese en el caso de que la joven tenga mellizos.

---

<sup>\*\*</sup> “Reflexiones acerca de la probabilidad” en Edwin Montoya, textos aún no publicados.

La incertidumbre, referida por el uso del término *probabilidad*, en los textos de los estudiantes, nos remite también a su relación con el conocimiento. Puede interpretarse un prejuicio frente a la falta de éste en el texto: *“Hay probabilidad de que yo no sepa nada de matemáticas ni de nada”* [183]. Se percibe una gran difidencia en sí mismo en este escrito o, tal vez, de temor frente al saber. ¿Qué podría promover una sensación así? Acaso, un suceso en el cual el sujeto no haya podido incidir gracias a su discernimiento. En otro texto, puede interpretarse bastante incertidumbre sobre la verdad del conocimiento que se posea, se percibe gran escepticismo: *“Puede (...) saber algo pero queda en duda, no sabe si es verdad o no (...)”* [128]. En cierto sentido, este escrito nos puede remitir al problema de la veracidad ¿Qué es la verdad acerca de lo que se considera conocimiento? ¿Será que esta sensación fluctuante se puede aplicar a todo saber? ¿Hasta dónde la duda puede abarcar lo que se cree comprender?

Tal puede ser la duda, que conduce a la confusión: *“Es cuando crees que es cierto algo pero no estás 100% seguro y una u otra cosa para ti es incorrecta”* [153]. Ser verdadero o ser falso, ninguno es totalmente correcto; habría un continuo entre ambos, ¿dónde estaría ese sujeto ubicado? Asimismo, la oscilación podría llevar a la contradicción: *“Se puede decir que es algo definitivo y a la vez no lo sea (...)”* [129] o, también, *“algo que puede ocurrir o a la vez no. Es algo donde se duda. Algo que puede ser y a la vez no”* [144]. Ser y no ser. Se sabe cierta cosa, pero, tal vez, lo que se sabe no es veraz; lo que genera el dilema.

Se podría desear que el conocimiento fuera *“(...) 100% verdadero”* [147], que nos procurara certidumbre o confianza pero, como no lo es, simplemente es probable y, por ello, se requiera *“poder probar algo sobre algo o alguien”* [131], para lo cual se requiere de información y bastante interpretación sobre ella. En este sentido, *“creo que esta probabilidad se haya de acuerdo a datos (...)”* [149] como cuando alguien escribe: *“En el colegio hice un examen, hay*

*probabilidad de que lo gane porque de 15 preguntas creo que solo me equivoque en 3, ya que estudie mucho para poder hacer la mayoría de respuestas buenas*” [159]. Ciertos resultados, ya considerados, brindan la posibilidad de aproximar otros nuevos, de asumirlos como válidos, pero, tanto los primeros como los segundos, no eliminan la duda en absoluto. En conclusión, el conocimiento puede disminuir la percepción de incertidumbre frente a los fenómenos, pero no la elimina totalmente<sup>††</sup>.

Se interpreta un inadecuado uso del término *probabilidad* en los textos: “Un carro viaja 3 días. Cada día gasta \$600.000 de gasolina y tiene que viajar 7 días. ¿Probablemente cuánto gastó en gasolina en los 7 días?” [182] y “hay una sola probabilidad de ganar la lotería, pero Pedro la logró al comprarla” [169]. En el primero, se trata de una situación determinística, en la cual el uso del vocablo en cuestión es innecesario..., sobra, es incorrecto, toda vez que no hay referencia a una situación de incertidumbre. En el segundo, la expresión “hay una sola probabilidad” de que algo ocurra es inadecuada, ya que el valor puede depender del número de posibilidades que haya en la ocurrencia de algo. Para este caso, lo que hay, si se compra un solo número de la lotería, es una *posibilidad* de ganarla, lo cual equivaldría, en el caso de una lotería de 4 cifras, a una probabilidad de 1/10000 ó 0,01%.

A continuación se prosigue, con más énfasis, en una comparación interpretativa entre los significados personales de los educandos y los significados institucionales del término *probabilidad*, estudiados en el capítulo II (aparte 2.4.), relacionados con el TARDÍO SURGIMIENTO DEL CONCEPTO, debido según Hacking (1995), a cierto papel de “la impiedad”, la necesidad de la existencia de una aritmética adecuada, un diferente concepto de causalidad y un desarrollo comercial que estableciese requisitos; SU DUALIDAD: Subjetiva y Objetiva (frecuencial y clásica).

---

<sup>††</sup> “Reflexiones acerca de la probabilidad” en Edwin Montoya, textos aún no publicados.

En textos de los estudiantes relativos a la probabilidad no se observa, en general, la relación de los fenómenos casuísticos y las intervenciones de “causas” sobrenaturales o divinas. Más bien, se presentan significaciones referidas con la esperanza y la confianza en fenómenos influenciados por la incertidumbre, como se ha visto en este aparte. Sin embargo, en el siguiente escrito se puede interpretar uno de los elementos relativos al tardío surgimiento del concepto:

*Su mamá se iría hacer unos exámenes porque había una probabilidad de que se le detectara un cáncer que si no se le trataba con tiempo podría hasta llegar a fallecer pero su maestro le dijo que solo era una probabilidad algo no muy seguro que tuviera fe en que Dios no permitiría que a su madre le pasaría algo tan penoso ella se fue para su casa un poco mas tranquila. Al otro día llegó directo donde su maestro y le contó que gracias a Dios el examen le salió negativo y muy feliz continuó estudiando [164].*

Se ha interpretado (p. 75) como incontrolada la “causa” del acontecimiento en este caso; sólo se percibe la posibilidad de esperar lo que ocurra, por lo que la influencia divina es solicitada. De tal manera, Dios es la “razón” por la cual no se presentó el suceso, gracias a Él no ocurrió.

Hacking, 1995, llama la atención sobre la necesidad de un factor de “impiedad” como posibilidad para el desarrollo del concepto de probabilidad. Se podría interpretar, gracias al anterior texto, que si el ser humano no se preocupara por tratar de hallar el conocimiento necesario para afrontar, para incidir sobre los fenómenos que se le presentan como incontrolables, sino que sólo se limitase a esperar lo que los hados decreten, entonces, tal vez, permanecería encadenado a esta situación. Si, por el contrario, y siguiendo el ejemplo del texto, la comunidad de investigadores médicos no sólo espera lo que pueda acontecer, sino que asume el papel de aprender, experimentar y crear posibilidades de solución a problemas, semejantes al presentado, entonces en las situaciones, como la ilustrada, se puede disminuir su nivel de fatalidad.

Otro elemento importante para el desarrollo de la probabilidad es una aritmética adecuada. En algunos textos se reconoce la necesidad de realizar operaciones combinatorias: *“De cuántas maneras se pueden sentar 4 persona en una banca de 4 puestos, ¿Qué debo hacer para solucionar? Usar probabilidad”* [203] y *“tengo 10 pimpones azules, 5 rojos, 15 morados y tres verdes en una bolsa, ¿qué probabilidad tengo de sacar un pimpón verde de la bolsa”* [195]. En el primer escrito, no se representa tanto un acto probabilístico, como aritmético, permutaciones. Sin embargo, puede interpretarse un sentido de búsqueda exhaustiva de posibilidades, paso inicial al resolver muchos problemas de probabilidad. En el segundo, puede referenciarse la relación establecida entre la percepción de incertidumbre de cuál objeto puede obtenerse y la posibilidad de establecer mediciones probabilísticas gracias a la aritmética realizable (probabilidad de una bola de cierto color, como razón entre los casos favorables a bolas de ese color y el total de bolas en la bolsa).

Las percepciones diferenciadoras con respecto a los fenómenos causados y aquellos en los cuales las causas se constituyen en un problema de conocimiento, se fundan en una premisa para el desarrollo del pensamiento probabilístico. Se ha interpretado (p. 72-73) en el texto: *“Un juego de parqués, he entrado dos fichos y mi adversario 3, quién ganará?”* [51], que las acciones operatorias realizables, como determinar las cantidades de fichas de cada jugador o la numeración de los espacios que faltan para llegar a la meta de cada una, no se constituyen como causa a priori de la posibilidad de determinar el ganador; más allá, el sujeto puede percibir que alguien va ganando en cierto momento, pero las cosas pueden cambiar y esos cambios son impredecibles.

En cuanto a las necesidades del contexto, que demanden un desarrollo del pensamiento probabilístico, se puede evidenciar aquellas referidas en algunos escritos. *“Es cuando es mejor ganar la materia con números que con letras porque hay más probabilidad”* [148]. En este caso, se hace reseña a la

evaluación realizada en los procesos escolares. ¿Por qué sería más fácil ganar con guarismos que con letras? ¿Podría alguien pensar lo contrario? Al considerar el contexto del estudiante autor del texto, en el cual la evaluación pasa de la escala cualitativa conformada por las letras D, I, A, S, E (se aprueba con A) a la numérica del 0 al 5 (se aprueba con 3), ¿Qué podría promover tal concepción probabilística?

Será, tal vez, que al realizar la correspondencia D=0, I=1, A=3, S=4 y E=5, además, cuando se realiza cierta evaluación y se deba asignar una nota (sin discutir la objetividad o subjetividad que pueda existir al asignar una calificación a las acciones de un sujeto), en la escala cualitativa no hay posibilidades intermedias entre los posibles valores; en particular, entre I y S hay sólo una posibilidad, una sola oportunidad entre el perder y el ganar bien. En cambio, en la otra escala, el continuo infinito de números entre 2 y 4 (entre los que se encuentra 3.1, por ejemplo) puede generar la percepción de que haya más posibilidades de aprobar al promediar números al final de un proceso educativo; porque realmente entre 2 y 3 hay tanta cantidad infinita de números como entre 3 y 4 (si se considera números con una cantidad determinada de decimales se tendría una situación similar en la igualdad de posibilidades).

*“Tengo un problema en el colegio que no se si gano o pierdo una materia pero no se si tendré la probabilidad de ganar que debo hacer para recuperarla. Si no tengo el suficiente valor para hablar con él”* [197]. En esta situación la incertidumbre es ingente. A parte del posible no manejo de los procesos evaluativos y de calificación en que haya participado, el desconcierto frente a lo que el otro puede aportar a las necesidades del sujeto introduce un sentido de dramatismo a la situación.

En la vida cotidiana *“hay probabilidad de que muchas mujeres mueran de cáncer”* [187]. El sujeto puede percibir la incertidumbre acerca de cuánto vivirá. No sabe si despertará mañana o si hoy es su último día. La posibilidad

de una enfermedad que acorte su vida está latente siempre ¿En qué puede contribuir un desarrollo del pensamiento probabilista para que los individuos, aunque no se aseguren la posibilidad de supervivencia, puedan aumentar sus probabilidades? Por ejemplo, si se fuma, tal vez se viva menos que en el caso contrario, puede acontecer un cáncer de pulmón; si se disparan balas perdidas aumenta la probabilidad de que alguien muera; si se conduce en estado de embriaguez la probabilidad de morir aumenta significativamente. Si todos estos ejemplos se acompañan de datos estadísticos que permitan su interpretación y el análisis de las situaciones, las personas podrían comenzar a realizar otro tipo de acciones.

*“¿Si probablemente tienes cáncer qué harías, ir al médico para curarte o hacerte el que no sabes nada de eso y quedarte con la duda de morirte pronto o no?”* [189] ¿Qué tipo de cáncer se tiene y cuál es la probabilidad de desarrollarlo?, ¿Qué tratamiento ha sido provechoso para un número significativo de pacientes? ¿Qué podría pasar si no se realiza ningún proceso médico? El pensamiento probabilístico permite al individuo apropiarse de información y tomar decisiones fundamentadas acerca de fenómenos inciertos, como los referidos.

La dualidad del concepto *probabilidad*, expuesta como subjetiva y objetiva, puede interpretarse en algunos de los textos de los estudiantes. La primera concepción, asumida como las “plausibilidades” que un sujeto asigna a las posibilidades de ocurrencia de sucesos en fenómenos inciertos, indeterminados, se evidencia en algunos textos. *“Para alguien que debe pasar un examen con una probabilidad muy alta, deberá estudiar muy bien”* [186]. Se hace referencia a una percepción personal con respecto al particular de realizar adecuadamente una prueba: debe haber mucha preparación para ello. A diferencia, alguien podría pensar que no necesite de mucha dedicación para lograrlo o proponer otras estrategias para hacerlo.

También, con respecto a la percepción subjetiva, se interpretan textos como: *“El verde está jugando muy mal y no hay ninguna probabilidad de que quede campeón, los jugadores le tienen que poner mas (...) para poder lograr el título”* [191]. En un campeonato, factiblemente, un conjunto ya no tenga posibilidad de ganarlo si ya ha sido eliminado. En el escrito, la fuente de la apreciación personal radica en el hecho de que el equipo no juega bien, lo cual no determina necesariamente que no haya posibilidad de triunfar ¿Cuántas veces se ha alcanzado el primer puesto aún sin jugar como se desearía? En el texto: *“un profesor estaba desconfiado de que un estudiante ganara una evaluación, pero otro docente le dijo -uno no sabe, existe una gran probabilidad de que ese joven logre ganar ese examen-”* [199], se hace referencia a las concepciones particulares de dos personas con respecto a una tercera. Y en el pasaje: *“Es muy probable que muchos alumnos pierdan el año ya que se pierde con dos materias, y muchos alumnos son muy perezosos pero con esfuerzo se puede ganar”* [207], puede haber una ampliación de las apreciaciones anteriores: de una parte, pesimismo general ante lo que los demás pueden hacer y, de otra, el sentido contrario.

Al observar los referentes en los tres textos anteriores se percibe la variabilidad en las percepciones con respecto a un mismo suceso que pueden tener diferentes personas, lo cual se constituye en una fuente vasta de posibles interpretaciones. Se propone que ésto no es una limitante en matemáticas, en particular en probabilidad, sino que se constituye en una fuente de expansión los potenciales contextos de aplicación de este conocimiento. En lógica clásica la expresión: *“probablemente me gane la beca en la universidad, pero creo que no me fue bien en los exámenes”* [202], podría constituir una contradicción. Si la prueba resulta mal, entonces, el juicio indicaría que no se logrará la beca. Sin embargo, en probabilidad, el creerse que no se realizaron adecuadamente las pruebas permite pensar que, tal vez, se alcance lo deseado. En la primera,

subyace la dualidad: se es o no. En la segunda, pervive lo difuso: puede ser o no, habría más alternativas.

Finalmente, en el aspecto subjetivo de la probabilidad, con respecto al texto: “*Gracias a que pongo atención a todo me va muy bien mi probabilidad de ganar la materia es del 95%*” [174], se puede interponer una relación interpretativa entre el manejo del lenguaje y de los números para referir “medidas” probabilísticas. “(...) *una probabilidad muy alta (...)*” [186], “(...) *una gran probabilidad (...)*” [199] y “(...) *muy probable (...)*” [207] son expresiones que se han usado, según la interpretaciones presentadas, para tratar de cuantificar las percepciones subjetivas con respecto a posibles sucesos. Puede apreciarse cierta flexibilidad en ellas al relacionarlas con la valoración de probabilidad expresa en el escrito [174] ¿95%? ¿Cómo establece el sujeto este valor? Posiblemente, el individuo sabe que entre más cerca esté del 100%, estaría expresando mayor confianza en su observación y, en este sentido, tampoco adopte este guarismo porque, tal vez, considere una pequeña contingencia de no lograr el cometido.

De esta manera, las asignaciones numéricas son bastante aproximadas a las cuantificaciones verbales (“*una gran probabilidad*” puede ser similar a 95% de probabilidad), aunque un poco más precisas; pero también pueden expresar mucha más subjetividad en su uso (¿Por qué no 94%, 96% o algo así?). En este sentido, la expresión “(...) *ninguna probabilidad (...)*” [191] podría considerarse muy afín con 0% de probabilidad. Pero, como se interpretó más arriba con respecto a este pasaje, la expresión valorativa no necesariamente implique la imposibilidad del suceso. ¿Será que una probabilidad calculada del 0% conlleve obligatoriamente a la imposibilidad de un acontecimiento?

Se considera el caso en el que se está jugando con un dado, ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un 7 al lanzar el dado una vez? Una posible respuesta calculada sería 0% (0 posibilidades de obtener 7 dividido por 6

posibilidades en total, definición clásica). Verbalmente se podría decir que “no es posible” o, más radical, que “es imposible”. Ahora, el relato:

*Torstein Frode cuenta que en Hising había una ciudad que estaba ligada en su suerte tanto a Noruega como a Suecia. Los dos reyes convinieron entonces en echar suertes por ver a quién de ellos les correspondería; arrojarían los dados y el ganador sería aquel que obtuviera el total de puntos mayor. El rey de Suecia sacó dos seis y dijo que no valía la pena que el rey Olav probara suerte, pero éste, mientras sacudía en la mano los dados, le respondió: "Hay todavía dos seis en estos dados, y no es difícil que Dios, mi Señor, los haga salir". Tiró los dados y obtuvo dos seis. El rey de Suecia volvió a echar los dados y obtuvo de nuevo dos seis. Luego el rey Olav tornó a jugar y uno de los dados mostró todavía un seis pero el otro se quebró en dos pedazos, con tanta fortuna que indicó siete. Entonces la ciudad le tocó a él (Snorri Sturlasson, Saga de Saint Olav p. 94, citado por Ekeland, 1992).*

podría orientar el pensamiento a considerar que, tal vez, las concepciones subjetivas de imposibilidad o de certidumbre no encuentran en la intersubjetividad principios de absolutidad, para alguien algo puede resultar de cierta forma pero para otro de una diferente, “(...) *depende de la persona*” [92]. Y, como en el relato, aún los sucesos reales pueden controvertir las percepciones individuales acerca de inviabilidad o seguridad.

El carácter objetivo de la probabilidad posee dos aspectos diferenciados: el frecuencial y el clásico o laplaceano. El primero se refiere a fenómenos que pueden repetirse gran cantidad de veces y que están compuestos de varios sucesos. Si se relaciona la cantidad de veces que se presenta un suceso y el número total de sucesos acontecidos, se obtiene la frecuencia relativa del suceso. Este aspecto es poco referido en los textos de los estudiantes, de acuerdo a la interpretación realizada, sin embargo, podría reseñarse alguno de los textos desde el aspecto frecuencial, pero con algunas aclaraciones, se tendría: “*En el Popular #1 hubo un tiroteo en el que Juan resultó herido, 3 balas en el estómago, hay un 89% de probabilidad que muera*” [184]. Esta situación correspondería a un caso de probabilidad frecuencial, por ejemplo, en el caso en que el valor de 89% fuese estimado, por ejemplo por un médico, con base

en la cantidad de pacientes que hayan fallecido después de que recibieran tal tipo de heridas.

En el caso anterior, si el valor de 89% lo establece arbitrariamente el sujeto, entonces correspondería a un caso de probabilidad subjetiva. Pero con los aditamentos interpretativos ha sido transferida a otro campo. Se propone la siguiente argumentación para considerar una valoración probabilística como subjetiva más que como frecuencial. Considérese el texto: “(...) *la probabilidad de que un avión, tenga un accidente es del 98%*” [149] ¿Por qué 98%? Parece una cifra más personal que frecuencial. La compañía Boeing hizo la siguiente afirmación al respecto: “(...) *uno debería volar una vez todos los días durante más de 8200 años para acumular 3'000.000 de vuelos para encontrarse envuelto en un accidente de aviación*”<sup>††</sup>. Lo anterior equivale a estimar una probabilidad de 1 vuelo accidentado entre 3 millones de vuelos, algo así como una frecuencia de 0,0000003333... ó 0,00003333...%.

De otra parte, el aspecto clásico o laplaceano de la probabilidad, en el que el valor probabilista para un suceso, dentro de un fenómeno incierto o indeterminado, es calculado mediante el cociente entre el número de posibilidades favorables a un suceso sobre el total de posibilidades, es más referenciado en los textos de los estudiantes. Los textos: “*Cuando lanzamos un solo dado la probabilidad de sacar dos es uno entre seis*” [168]; “*cuando mi abuela juega chance la probabilidad de ganar es de 1 en 10000 ya que ella sólo hace un número*” [170], se constituyen en casos explícitos de probabilidad clásica; además, las situaciones planteadas por dos de los estudiantes en los escritos: “*Tengo 10 pimpones azules, 5 rojos, 15 morados y tres verdes en una bolsa, ¿qué probabilidad tengo de sacar un pimpón verde de la bolsa*” [195] y “*si lanzas dos dados ¿cuál es la probabilidad de sacar 7 puntos?*” [198], se pueden resolver recurriendo a este tipo de cálculo.

---

<sup>††</sup> Consultado en [www.mipunto.com/temas/01/avion.html](http://www.mipunto.com/temas/01/avion.html) en 02/02/11

Finalmente, resulta bastante interesante interpretar el concepto clásico de probabilidad en los términos del siguiente texto: *“es una hipótesis que intenta predecir cual posibilidad del azar es la más posible de ser escogida”* [146]. En el caso de la bolsa de pimpones, al sacar al azar uno de ellos, la probabilidad de obtener un pimpón verde es de  $3/33$  ó 9,09%. Ahora, la de obtener un pimpón morado es de  $15/33$  ó 45,45%. Los valores de 9,09% y 45,45%, según el referente textual, serían hipótesis que establecen que es *más posible* sacar un pimpón morado que uno verde. Serían conjeturas, en el sentido de que al sacar un pimpón podría ser verde y no morado, aunque éste tenga mayor probabilidad de obtenerse o, aún más, puede ocurrir que no se obtenga ninguno de los dos colores: sacar un pimpón rojo. En términos de otro texto de los estudiantes, a la pregunta *¿Cuál de los dos colores, verde o morado, se obtiene al sacar un pimpón al azar?*, puede decirse, con respecto al término *probabilidad*, que *“el problema de esta palabra es que nos dice que hay dos respuestas (o más), pero no nos ayuda a ver cual es la respuesta correcta”* [200].

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### ACERCA DEL AZAR, LA ALEATORIEDAD Y LA PROBABILIDAD

De acuerdo al trabajo interpretativo realizado con los textos de los estudiantes, se encuentra que para cada término y uso textual se abre un “mapa” de posibilidades interpretativas, un sinnúmero de senderos significativos que difícilmente pueden ser sintetizados en estas conclusiones. Sin embargo, en un amable intento, puede decirse, particularmente, lo que sigue:

El término *azar* es referido a los juegos sometidos a la eventualidad. De una parte, a aquellos juegos en los que la simple táctica no es suficiente para ganar y, por lo tanto, hay algo más, no controlable, no determinado que entra en juego; de otra parte, a estos mismos juegos en un sentido problemático de índole personal y social.

Es posible que para algunas personas sus convicciones religiosas sean un obstáculo para la manipulación de dispositivos o juegos de azar, en cuyos casos se requerirá de ciertas estrategias para el empleo de artefactos aleatorios que promuevan las ideas sobre el azar, la aleatoriedad y la probabilidad. El diseño y desarrollo de esas actividades depende de la situación particular de los individuos del proceso educativo y de la posibilidad de consenso respetuoso en las ideas.

En este trabajo no se aborda el diseño de situaciones didácticas que permitan la vigilancia epistemológica en la construcción de los conceptos probabilistas relacionadas con la toma de decisiones (a este respecto puede consultarse el trabajo de Kahneman et ál., 2007). Sin embargo, si se establecen interpretaciones relacionadas con la percepción intuitiva de la incertidumbre, la correspondencia entre sucesos reales y las asignaciones de valor subjetivas, el

sentido ético en las disposiciones y el papel del conocimiento frente a las situaciones que requieren la determinación de laudos. Todos estos elementos se constituyen en las precomprensiones que los estudiantes poseen al llegar al proceso educativo y permitirían la construcción de las actividades didácticas requeridas.

La concepción que sobre el azar se posea resulta orientadora a la hora de tomar decisiones, en las que puede resultar importante consideraciones de carácter ético o el conocimiento que el sujeto pueda tener o desear. El término puede significar falta de razones, de intenciones o de conocimiento para decidir frente a las elecciones, a las escogencias. De tal manera que, el sujeto que decide, al reflexionar, al hacerse consciente de las posibles consecuencias de sus decisiones, podría, posiblemente, no dejar a la simple eventualidad el resultado de sus disposiciones. Más bien, puede pretender la comprensión del bien o el mal, de lo adecuado o inadecuado, de sus acciones decisorias y puede, además, desear aproximarse a un nivel de intencionalidad frente a las situaciones gracias al conocimiento que sobre ellas pueda tener.

El término *suerte* puede ser poco usado en el contexto matemático, pero en la cotidianidad es ampliamente referido en los textos de los estudiantes. Éste puede connotar algo positivo al usarlo sin modificadores gramaticales, la *suerte* sería algo bueno per se. Pero, en otros contextos, este vocablo debe ir acompañado de expresiones como *buena* o *mala* para determinar su significación de forma más clara.

En el uso textual del término *azar* el sujeto puede expresar temor, ansiedad, angustia frente a las situaciones que involucran la incertidumbre de los sucesos. O, por el contrario, frente al azar se puede sentir tranquilidad, sosiego, porque como el azar no puede controlarse, entonces, ¿para qué preocuparse?

La manifestación del desconocimiento acerca de la significación del término *azar* no determina la imposibilidad de que un sujeto no reconozca una situación

como sometida a la incertidumbre, en particular, en aquellos casos en los cuales no es dable establecer con seguridad los posibles resultados de un fenómeno. En sentido contrario, el reconocimiento de que el vocablo esté relacionado con algo, como los juegos de azar, no establece la necesidad de que el sujeto asimile los sucesos a situaciones indeterminadas.

Con respecto al desarrollo del pensamiento aleatorio, en particular de la idea de azar, relacionado con los trabajos de Fischbein y Piaget e Inhelder (descritos en el Capítulo I, p. 27-30), se considera que son necesarios estudios de carácter cognitivo y de mayor individualización para poder establecer el nivel de desarrollo de los individuos. Sin embargo, en este trabajo, se conjeturan interpretaciones con respecto a este proceso. Es posible presumir un adecuado desarrollo del pensamiento probabilístico en casos en que haya evidencia referencial en el texto de un individuo, al relacionar las acciones operatorias realizables al interior de un suceso con la posibilidad o no de determinar un posible resultado o, similarmente, cuando se vincula lo cuantitativo-operacional y la incertidumbre que establece el azar como la posibilidad no absoluta de llegar a ser algo, ser sólo hipótesis, y las diferencias en las posibilidades de serlo.

El término *aleatoriedad* es el menos usado y al que, según la interpretación realizada, menos variación en la significación se le asigna. Puede reseñarse con fenómenos físicos en los que hay cosas que “giran”. También, se relaciona con sucesos que pueden ocurrir en el pasado, el presente o el futuro de manera fortuita y, al suceder estos fenómenos, pueden acontecer con características referidas al orden o al desorden en las ocurrencias; o sea, algo que acontece aleatoriamente puede hacerlo en forma establecida (no en sentido determinista, sino, por ejemplo, en el orden que un aparato de audio reproduce ciertas canciones) o indeterminada (si se pensara, por ejemplo, en la casualidad del “orden” dado a las canciones).

La palabra *aleatoriedad* se puede relacionar con situaciones en las que diferentes sucesos son igualmente posibles. Fenómenos físicos, como el lanzamiento de una moneda, o fenómenos sociales en los que, por ejemplo, se entrega aleatoriamente algo a alguien sin ningún tipo de discriminación, serían significaciones dadas por los sujetos de acuerdo a la igualdad mencionada. El sentido de la aleatoriedad está relacionado con fenómenos en los cuales no es posible determinar lo que sucede con exactitud, con precisión, no es controlable lo que suceda.

El término *probabilidad* es ex-puesto con relación al vocablo *posibilidad*, tal vez como sinónimos; o el primero como condicionante del segundo, determina en qué forma puede darse cierta eventualidad en los sucesos. Los textos, en relación, exponen fenómenos que son percibidos como inciertos, incontrolados (aunque en ocasiones hacen uso de la palabra en contextos determinísticos) refiriendo la caracterización subjetiva de éstos. En particular, se establecen situaciones posibles con esperanza, con confianza. Manifiestan algo deseado, algo bueno. Pero, también, pueden expresar el deseo contrario, que haya la posibilidad de que no sucedan, porque no se quiere, no conviene, no gusta.

Más allá, la probabilidad es ex-puesta como “medida” de cuán posible es algo. Este uso es manifiesto ya sea gramatical o numéricamente con expresiones que van desde nada a todo o de 0% a 100%. En particular, una probabilidad nula o del 0% no ha sido interpretada como imposibilidad en la ocurrencia de un suceso, como tampoco otra del 100% ha sido considerada de certeza absoluta o de necesario acaecimiento.

La percepción del conocimiento juega un papel importante en las significaciones personales con respecto a la probabilidad. El sentido de incertidumbre puede llevar al sujeto a dudar con respecto a la verdad de un saber que se cree tener y la irresolución puede conducir a la confusión (si se atesora o no) e, incluso, a la contradicción (se posee y no al mismo tiempo). En estos

estados, el individuo puede hacer el intento de probar las ideas para conquistar un poco de certidumbre, de certeza. Aunque, al final, se interpreta que, el conocimiento puede disminuir la percepción de incertidumbre frente a los fenómenos, pero no la elimina completamente.

Al comparar, en forma hermenéutica, los significados personales interpretados en los estudiantes, por razón de sus textos, con los significados institucionales, interpretados en el estudio epistemológico, se encuentra que algunos escritos se pueden relacionar con diferentes caracterizaciones, momentos o contextos de significación de los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*. Se interpretan algunos textos relacionados con causas desconocidas de origen mágico o divino; contraposición entre causas y azar o éste como “causa”. Ninguno de los textos se interpreta con referencia directa al significado de que *todo tiene una causa*; sin embargo, se relaciona el azar como medida de la ignorancia y el tratamiento que se dé a los fenómenos sometidos a la incertidumbre como conocimiento.

También, pueden atañerse algunos textos con la *aleatoriedad*, como *Equiprobabilidad*, y su relación con el *Principio de indiferencia*. Se analiza el reconocimiento de fenómenos físico-naturales y socio-cotidianos referidos a lo aleatorio, en la significación de imposibilidad de determinar ocurrencia de posibles sucesos y con el carácter subjetivo de la incertidumbre, aún en fenómenos concebidos, en general, como objetivamente aleatorios.

Además, muchos textos de los estudiantes pueden asociarse con las ideas del tardío surgimiento del concepto de probabilidad: Cierta papel de “la impiedad”, la necesidad de la existencia de una aritmética adecuada, un diferente concepto de causalidad y un desarrollo comercial que determine necesidades. Con respecto a su naturaleza dual, se interpretan escritos con carácter subjetivo y objetivo. El primero, asociado a las “plausibilidades” que un sujeto asigna a la ocurrencia de un evento. Con respecto al segundo, se analizaron textos desde la concepción

clásica o laplaceana, lo cual resultó bastante evidente y, desde la concepción frecuencial, no se referenciaron textos, a parte de uno de ellos al que se le añadieron elementos para poder aprovecharlo.

En general, las interpretaciones de los textos de los estudiantes no reseñaron fenómenos probabilistas a causas desconocidas, más bien se relacionaron con la esperanza y la confianza en los sucesos y con el papel que el conocimiento puede desempeñar para tratar de incidir en los acontecimientos. Se presentaron situaciones de combinatoria y de reconocimiento de la necesidad del pensamiento probabilístico en diferentes contextos cotidianos y no cotidianos.

Todo lo anterior es muestra fehaciente de la posibilidad que determina la hermenéutica para la didáctica de la matemática. En particular, gracias a la interpretación, pueden referirse los significados personales que los sujetos manifiestan a través de la escritura de textos adecuados y, además, pueden relacionarse aquellos con los significados institucionales también interpretados en estudios epistemológicos.

## **ACERCA DEL TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LA PROBABILIDAD**

Al iniciar el estudio de la probabilidad, estudiantes de Educación Media manifiestan, a través de escritos, significados personales referentes a los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*. Estos se relacionan, en general, con situaciones cotidianas que contextualizan las precomprensiones que los sujetos han elaborado gracias a la interacción directa con los fenómenos. Algunos significados particulares muestran en pleno la subjetividad en las percepciones de los acontecimientos sometidos a la incertidumbre. Otros pueden ser referidos a los significados institucionales establecidos en investigaciones epistémicas y, varios más, no conciernen con el sentido que deben adquirir en la clase de matemáticas.

Al establecer, interpretativamente, las semejanzas y diferencias entre las concepciones personales y las institucionales de los términos probabilísticos, dados los problemas (o mejor oportunidades) de la polisemia, la imprecisión y falta de claridad del lenguaje cotidiano, se estaría asumiendo el principio educativo establecido por Ausubel (1980:6): *“De todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente”*.

El reconocimiento de esas relaciones permitiría diseñar estrategias de enseñanza y aprendizaje de los conceptos y procedimientos probabilísticos que involucren la resolución de problemas y la toma de decisiones; tengan en cuenta obstáculos ontogenéticos, relativos a la comprensión de las nociones por los individuos; obstáculos epistemológicos, referentes a los problemas en el desarrollo de los conceptos en la institución matemática; obstáculos didácticos relacionados al lenguaje y los contextos de ejemplificación y experimentación para la construcción del conocimiento (Serradó et ál., 2005).

Se propone realizar más investigaciones orientadas al diseño de estas estrategias. Como aporte se puede estipular lo siguiente: *La construcción de situaciones problemáticas y de escenarios para la toma de decisiones* se puede realizar de acuerdo a los contextos que los individuos reconocen y habitan y a las necesidades, intereses y expectativas que ellos les determinan, todo éso evidenciado en los textos que recrean. Estas construcciones deben tener en cuenta, del mismo modo, la superación de *obstáculos* relacionados con la *explicación y manipulación de situaciones y dispositivos* que promuevan el estudio de los fenómenos inciertos, en particular, las interpretaciones realizadas en este trabajo exponen características a este respecto. El nivel de desarrollo del pensamiento de las ideas probabilísticas también es conjeturado, interpretativamente, con base en los textos que producen los estudiantes y en relación con las investigaciones acerca de ese proceso, lo cual se constituye en un insumo especial para el esbozo de las situaciones de enseñanza y aprendizaje, ya

que los ambientes a que se pueda enfrentar un sujeto, en la construcción del conocimiento, dependen en gran medida de su estadio de desarrollo intelectual y, de esta manera, se pueden prevenir los *obstáculos ontogenéticos*.

El estudio epistemológico efectuado contribuye significativamente al análisis-interpretativo del desarrollo de las ideas de la teoría de la probabilidad y referirlas a las preconcepciones interpretadas en los textos de los estudiantes. De esta manera, se podría afrontar los *obstáculos* en el *proceso de construcción de los conocimientos* al detectar las semejanzas y diferencias entre los significados personales y los institucionales para, luego, aprovechar las confluencias y acortar las distancias en las acciones orientadas al diseño de las situaciones educativas.

En general, el trabajo epistemológico acerca de los significados de los términos *Azar, Aleatoriedad y Probabilidad*, se constituye en un aporte pertinente a la literatura disponible en este tipo de estudios, pero se recomienda recurrir a las fuentes, y demás trabajos epistémico-interpretativos, con el fin de propiciar nuevas posibles interpretaciones.

Así, el tratamiento didáctico de la probabilidad necesita, de parte del educador, además del conocimiento de las definiciones, los teoremas y los ejercicios y “problemas” tipo, un conocimiento epistemológico acerca del desarrollo de los significados de los objetos, con el fin de poder interpretar los fenómenos físicos y, en particular, los sucesos cotidianos de carácter social desde diferentes perspectivas.

En lo concerniente a los *obstáculos* presentados por el *lenguaje*, puede evidenciarse que los términos *Azar, Aleatoriedad y Probabilidad* presentan diversos sentidos y connotaciones, en su uso cotidiano y, aún, en las matemáticas. Frente a esta situación de polisemia, el pensamiento hermenéutico se constituye en piedra de ángulo, en aquellas situaciones del trabajo didáctico, en las que no es posible comunicar las ideas con un lenguaje claro y preciso. Por el contrario, allí donde el lenguaje se torna confuso, ambiguo, oscuro, cuando existe

la emergencia de múltiples interpretaciones, entra en juego la hermenéutica filosófica, posibilitando la inmersión en el lenguaje, el reconocimiento de mundos posibles de significación y, aún, la consecución de acuerdos o desacuerdos frente a las ideas, pero generando la posibilidad de comunicación entre los sujetos.

Por lo anterior, resulta conveniente un estudio acerca de los sentidos que estos vocablos refieren en cada situación particular para la enseñanza y aprendizaje de la teoría de la probabilidad y, así, propiciar espacios de comprensión lingüística entre los participantes de la relación educativa. La forma de interpretación, desarrollada en este trabajo, se constituye en una propuesta fulgurante para la reflexión de los problemas del lenguaje en los estudios didácticos donde habita la complejidad del significado y la multiplicidad de interpretaciones posibles, no sólo para la probabilidad, sino para otros campos de la matemática en los que podrían realizarse investigaciones similares.

## **ACERCA DEL APOORTE DE LA HERMENÉUTICA FILOSÓFICA A LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.**

En un estudio como el realizado, en el que las características filosófico-epistemológicas del significado de los objetos probabilistas muestran complejidad en la relación con el lenguaje, tanto en los discursos filosóficos con respecto al *azar*, la *aleatoriedad* y la *probabilidad*, como en las expresiones cotidianas de los sujetos, el carácter analítico-interpretativo del pensamiento filosófico-hermenéutico proporciona la posibilidad de construir un camino, una forma, una actitud, una posición frente a la interpretación de los significados de los sujetos con relación al lenguaje escrito y, de esta manera, afrontar la complejidad comunicativa.

Más específicamente, los objetos matemáticos poseen, por un lado, significados institucionales que pueden ser interpretados en los estudios epistemológicos y, por otro, significados personales que, como se ha evidenciado, se pueden interpretar analíticamente en textos producidos por los sujetos cuando usan expresiones que refieren esos objetos.

Se hace referencia a la intrincación entre el estudio filosófico y el estudio matemático que representa este trabajo investigativo, en relación a los procesos educativos. En estos la ciencia “exacta” se puede mostrar, como lo haría una filosofía de la matemática, de acuerdo a una ontología específica de los objetos, mediante una reducción de los problemas a situaciones lingüísticas o lógicas, que puede determinar, según Badiou (2004), cuatro modos de concebir tal existencia: como intrínseca (realismo), como correlato de un nombre (lingüística), como construcción mental (constructivista) o como un correlato variable pragmático (relativista).

Un poco más de cerca se diría que pueden abordarse las matemáticas como una existencia real indiferente de los límites del lenguaje y trascendentes de las capacidades humanas; como objetos existentes al satisfacer una forma sintáctica transparente y verificadora; como constructos mentales dados por la posibilidad de otros ya construidos; o como existencia, gracias a determinado contexto teórico.

De otra forma, que puede compartir características con las anteriores pero en esencia diferente, se propone que la matemática sea considerada como una posibilidad de ser y actuar en-el-mundo. El conocimiento matemático habita el mundo de la experiencia de los sujetos, desde el nacimiento están inmersos en situaciones que los colocan frente a las ideas. En este sentido, el saber es social y cultural y está mediado por las interacciones perceptivas de los individuos y de sus relaciones comunicativas con otros. Cada ente matemático adquiere significado dentro de la historia particular de una persona, quien frente a las diferentes

circunstancias crea su propia interpretación (dos matemáticos no piensan el *uno* de la misma forma).

Ahora, dentro de una institución, como la de la ciencia en cuestión o la de la educación, los particulares, con sus referentes, se congregan para compartir sus interpretaciones y construir acuerdos intersubjetivos que objetivan el saber, acerca de un objeto, su significado institucional. En consecuencia, los sujetos enfrentan las situaciones que les requieren resolver problemas o tomar decisiones de acuerdo a los significados que posean, los cuales pueden ser de carácter muy personal o haber sido desarrollados al concurrir con otros.

De aquí que la filosofía debería entrar en la lógica (o lógicas) vía las matemáticas y no al contrario.

*La lógica pertenece a la coherencia del aparecer y si el estudio del aparecer también moviliza ciertas áreas de las matemáticas esto es debido simplemente a que, siguiendo una intuición formalizada por Hegel pero que finalmente se remonta a Platón, la esencia del ser es aparecer. Esto es lo que mantiene la forma de todo aparecer en un orden matematizable trascendental (Badiou, 2004).*

En este trabajo los saberes, significados personales, aparecen, o son hechos aparecer referencialmente, en las manifestaciones escriturales relacionadas con los objetos matemáticos. Ellos son ex-puestos ahí, en situaciones del mundo de la vida que el sujeto posiblemente evoca o crea, pero no de la nada, sino de lo que ha experimentado en la cotidianidad de sus vivencias. Lo que ha estado en-el-mundo, y que ha sido vivido subjetivamente, se objetiva a través del texto, un conocimiento que, interpretativamente, se relaciona con otro que ya había sido objetivado (matematizado) por medio de la epistemología, como estudio lógico.

Se entra en el juego del conocer a través del “mundo de la experiencia” y no del mundo como existente conforme al concepto de verdad de la ciencia –mundo como existente teóricamente-. A partir de la vida del sujeto (en contacto con los fenómenos y con los otros), de su apreciación subjetiva del darse previó de su

mundo, de la forma en cómo interpreta su aparición, los objetos se develan como determinaciones posibles de ser objetivadas científicamente –institucionalmente–.

*Tenemos, pues, en el mundo de la experiencia objetos que no sólo están ahí como los otros, sino que, en el ámbito de experiencia de lo que es, “expresan”, “comunican” algo que es, y en particular desarrollan una teoría, y que son para el mundo teorías o proposiciones en teorías (Husserl, 2008).*

Así, los sujetos que han vivenciado de manera diferentes los objetos, en sus mundos particulares, desarrollan la posibilidad de construir, para cada uno, nuevos mundos individuales, nuevas formas de ser y de actuar. Pero, además, encuentran la posibilidad, en la relación intersubjetiva, de constituir un mundo comunitario.

*El mundo que se ha de construir por uno y el mundo que se ha de construir por otro pueden diferenciarse, y el estilo del darse previo puede experimentar cambios, pero todos los cambios se mantienen en la posibilidad de la comunicación; por eso reciben, en relación unos con otros, en la síntesis de identificación de los “mundo” de sujetos que se comunican, necesariamente el carácter de “apariciones” del mismo y único mundo (Husserl, 2008).*

Se trata, entonces, de posibilidad. Frente a la matemática se tendría una forma de pensamiento, en términos de Badiou, laico, lo cual la deja ex-puesta. No hay una postura hierática de enunciación. Más allá, ella activa un cierto proceso posible para el que se requiere un mínimo de sociedad y que al menos dos intérpretes se puedan comunicar, activar sus realidades y puedan entrar en el juego del conocer. Para el caso específico de este trabajo, se tendrían dos sujetos con sus respectivos referentes, que pueden plantearse el ser de lo azaroso, de lo aleatorio y de lo probable, el cual aparece, primero en-el-mundo que habita el sujeto y, luego, en su realización escritural. En reciprocidad, también puede percibirse lo azaroso, aleatorio y probable del ser que aparece, ya que lo lógico de lo que ha transitado caminos epistémicos, conocer probabilístico-matemático, se torna difuso, extraño, con nuevos matices.

El aporte matemático no es tan nítido, claro ni preciso como suele pensarse. Es también libertad, hay posibilidad de ser de otra forma, de actuar distinto. Hay posibilidad de romper con las opiniones, pero es una posibilidad discontinua e incompleta. Por su intento fallido de rigidez, lóbrega pasión, necesitaría de herramientas filosóficas como la hermenéutica para ir y volver sobre lo que puede ser de otro modo. Como dice Badiou “La mathématique est l’entre-deux de la vérité et la liberté de la vérité”. La matemática es activa y activante y, en educación, ha de ser manejada fecundamente. Siguiendo a Mesetas (2004), tendría dos caras en un eterno círculo reactivador. La cara de la matemática, la oscura materialidad hecha sociedad -aristócrata-, por lo que, necesariamente, es materia de saber. Y la cara de la filosofía, que intenta elucidar la discontinuidad establecida por aquella y sus sombras.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALATORRE, S. (1998). Acerca del Tratamiento Didáctico de la Probabilidad. En: Correo del Maestro N. 26, junio. [Online: <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/1998/julio26/incert26.htm>] Consultado en enero 9 de 2010
- AUSUBEL, D. (1980). Psicología Educativa. Editorial Trillas. México.
- AZCÁRATE, P. (1995). El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Tesis Doctoral. Universidad de Cadiz.
- BATANERO, M. (2005). Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria. En: Relime, Vol. 8, Núm. 3. Noviembre. pp. 247-263. México.
- BATANERO, M., GODINO, J. D. y ROA, R. (2004). Training teachers to teach probability. Journal of Statistics Education, 12(1). [Online: <http://www.ugr.es/~batanero/>] Consultado en enero 12 de 2010.
- BATANERO, M., ORTIZ, J. y SERRANO, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. En: Revista Uno: Probabilidades. No. 44. Enero, febrero y marzo. pp. 7-13. Barcelona.
- BATANERO, M., ORTIZ, J. y SERRANO, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. En: Revista Uno: Probabilidades. No. 44. Enero, febrero y marzo. pp. 7-13. Barcelona.
- BELMONTE, J. (2007). El juego en la educación infantil. En: CHAMORRO, M. (Comp.) Didáctica de las matemáticas para educación infantil. Madrid: Pearson.
- BENNETT, D. (1993). *The development of the mathematical concept of randomness; educational implications*. Tesis doctoral. New York University. (DAI n. 9317657).
- BOREL, E. (1988). Las probabilidades y la vida. Ediciones Orbis. Barcelona.

- BROUSSEAU, G. (1991) ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? IREM, Université de Bordeaux, Francia. [Online: <http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/Didactica1-Brousseau.pdf>.] Consultado en enero 8 de 2010
- CHEVALLARD, Y. (1991). La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. Aique. Buenos aires.
- DICKSON, L., BROWN, M. y GIBSON, O. (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Editorial Labor. Barcelona.
- EKELAND, I. (1992). Al azar: La probabilidad, la ciencia y el mundo. Editorial Gedisa. Barcelona.
- FINE, T. (1973). Theories of Probability. Academic Press. New York.
- FISCHBEIN, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Reidel. Dordrecht.
- GADAMER, H. (1977). Verdad y Método I. Fundamentos de una hermenéutica filosófica. Sígueme. Salamanca.
- GALLARDO, J., GONZÁLEZ, J. Y QUISPE, W. (2008). Rastros de comprensión en la acción matemática. La dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática: Simposio en Badajoz.
- GARCÍA, M. (2005). Introducción a la teoría de la probabilidad. F.C.E. México.
- GEERTZ, C. (1988). Works and lives: the anthropologist as author. Stanford University Press. Stanford.
- GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- GODINO, J. D., BATANERO, C., y FLORES, P. (2003). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. Universidad de Granada. España.

- GODINO, J. D., BATANERO, C., y FONT, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- GODINO, J. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3, pp 325-355.
- GONZÁLEZ, E. (2006). Sobre la hermenéutica o acerca de las múltiples lecturas de lo real. Universidad de Medellín. Colombia.
- HACKING, I. (1995). El surgimiento de la probabilidad. Gedisa. Barcelona.
- HAIGH, J. (2003). Matemáticas y juegos de azar. Túsquests Editores. Barcelona.
- HELLER, A. (1994). Sociología de la vida cotidiana. Barcelona: Península.
- HUSSERL, E. (2008). El mundo de la vida: Explicitaciones del mundo predado y de su constitución. Textos del legado (1916-1937). HUSSERLIANA XXXIX.
- KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (2007). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge University Press. New York.
- KOLMOGOROV, A. (1933). Foundations of the theory of probability. Chelsea Publishing Company. New York.
- KYBURG, H. E. (1974). *The logical foundations of statistical inference*. D. Reidel Publishing Company. Boston.
- LAPLACE, P. (1995). Ensayo filosófico sobre las probabilidades. Ediciones Altaya. Barcelona.
- LUCAS, J. R. (1970). The Concept of Probability. Oxford
- MATALÓN, B. (1979). Epistemología de las Probabilidades. En PIAGET, J. (Ed.). *Epistemología de la Matemática* (pp. 121 - 145). Paidós. Buenos Aires.

- MAY, K. (2003). Conocimiento abstracto: un caso a favor de la magia en el método. En: MORSE, J. (Edit.). Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa. Universidad de Antioquia. Medellín.
- MEN, Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares área de matemáticas. Editorial Magisterio. Bogotá.
- MEN, Ministerio de Educación Nacional. (2003). Estándares básicas de competencias en matemáticas. Editorial Magisterio. Bogotá.
- MORSE, J. (2003a). La investigación cualitativa: ¿realidad o fantasía? En: MORSE, J. (Edit.). Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa. Universidad de Antioquia. Medellín.
- MORSE, J. (2003b). "Emerger de los datos": los procesos cognitivos del análisis en la investigación cualitativa. En: MORSE, J. (Edit.). Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa. Universidad de Antioquia. Medellín.
- NIETZSCHE, F. (2009). Sobre verdad y mentira. Miluno Editorial. Buenos Aires.
- OBREGÓN, I. (2007). Magia y belleza de las matemáticas y algo de su historia. Intermedio Editores. Bogotá.
- ORTIZ, J. J., BATANERO, M. C. y SERRANO, Luís. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. [Consultado el 15 de diciembre de 2009 en <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/SUMALENGUAJE2001.pdf>]
- ORTIZ, J. y SERRANO, L. (2001). Reflexiones sobre el lenguaje probabilístico en los libros de texto de Educación Secundaria. Comunicación presentada en las Jornadas Europeas de Estadística. Mallorca; Instituto Balear de Estadística. 2001. [Consultado diciembre 15 de 2009 en [http://www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades\\_10\\_01/doc/reflexiones.doc](http://www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades_10_01/doc/reflexiones.doc)]
- ORTON, Antony. (2003). Didáctica de las matemáticas. Ediciones Morata. Madrid.
- PAULOS, J. A. (2000). El hombre anumérico. Túsquests Editores. Barcelona.
- PIAGET, J. y INHELDER, B. (1972). De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Paidós. Buenos Aires.

- PIMM, D. (1987). El lenguaje matemático en el aula. Ediciones Morata. Madrid.
- POINCARÉ, H. (1936). El Azar. En J. Newman (Ed.), *Sigma. El mundo de las matemáticas*, 3, 68 - 85. Barcelona: Grijalbo.
- PRIGOGINE, Ilya. (1996). El fin de las certidumbres. Editorial Andrés Bello. Santiago de Chile.
- RICOEUR, P. (2002). Del Texto a la Acción. FCE. México.
- ROTHERY, A. (1980). Children Reading Maths. Worcester. College of Higher Education.
- SÁENZ, Cesar. (1997). La naturaleza de la probabilidad. En: Tarbiya, No.15, p. 89 – 111.
- SÁNCHEZ, Ángel. (2001). El método hermenéutico aplicado a un nuevo canon. En: CAUCE, Revista de Filología y su Didáctica, n. 24, p. 295-323.
- SANDELOWKI, M. (2003). La prueba está en la alfarería: hacia una poética de la investigación cualitativa. En: MORSE, J. (Edit.). Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa. Universidad de Antioquia. Medellín.
- SERRADÓ, A., CARDEÑOSO, J. y AZCÁRATE, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico. En: Statistics Education Research Journal, 4(2), 59-81 [Consultado el 15 de diciembre de 2009 en [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4\(2\)\\_serrado\\_etal.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4(2)_serrado_etal.pdf)]
- WITTGENSTEIN, Ludwig. (2008). Investigaciones filosóficas. UNAM. 1988.
- YAÑEZ, G. (2007). También existen buenas intuiciones en probabilidad. En: Cuadernos de Investigación. No. 10. pp. 66-76. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

## BIBLIOGRAFÍA

- BENGOA, J. De Heidegger a Habermas: Hermenéutica y fundamentación última de la filosofía contemporánea. Herder. Barcelona. 1997.
- BISHOP, A. Aproximación sociocultural a la Educación Matemática. Universidad del Valle. Colombia. 2005.
- CIURANA, E. Antropología hermenéutica. Universidad de Valladolid. España.
- CONDORCET, N. Matemáticas y sociedad. FCE. México. 1990.
- D'AMORE, B. Didáctica de la matemática. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá. 2006.
- GAITAN, C. Enfoques de la investigación en Ciencias Sociales: Perspectivas hermenéutica y crítica. Módulo del Área de Investigación, Maestría en Educación y Desarrollo Humano. Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (CINDE) - Universidad de Manizales. 2008.
- GAITAN, C. Historia de la epistemología y crítica al positivismo. Módulo del Área de Investigación, Maestría en Educación y Desarrollo Humano. Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (CINDE) - Universidad de Manizales. 2008.
- GUTIERREZ, G. Metodología de las Ciencias Sociales II. Editorial Harla. México. 1986.
- HERNÁNDEZ, R., FERNÁNDEZ, C., y BAPTISTA, P. Metodología de la investigación. McGraw-Hill. Chile. 2004
- HOYOS, J. Ludwig Wittgenstein (1889-1951). En: Ciencias Humanas, No. 25, Universidad Nacional de Colombia. Medellín. Nov. 1999.
- KLINE, M. El fracaso de la matemática moderna: ¿Por qué Juanito no sabe sumar? S. XXI Editores. México. 1998.
- LUNA, M. T. Análisis cualitativo. Módulo del Área de Investigación, Maestría en Educación y Desarrollo Humano. Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (CINDE) - Universidad de Manizales. 2009.
- PAULOS, J. A. Más allá de los números. Túsquests Editores. Barcelona. 1998.

PAULOS, J. A. Un matemático lee el periódico. Túsquests Editores. Barcelona. 1997.

RICOEUR, P. El conflicto de las interpretaciones. FCE. Argentina. 2006.

RICOEUR, P. Teoría de la interpretación. S. XXI Editores. México. 2006

RUBIO, J. Hermenéutica e investigación. En: Horizontes Pedagógicos (Bogotá), No. 7, 2005, pág. 47-59.

RUELLE, D. Azar y caos. Alianza Editorial. Madrid. 1995.

WOLCOTT, H. Mejorar la escritura de la investigación cualitativa. Universidad de Antioquia. Medellín. 2003.

## ANEXO 1. Instrumento para la solicitud de manifestaciones escriturales.

### INTERPRETACIÓN DE SIGNIFICADOS PERSONALES SOBRE LOS TÉRMINOS AZAR, ALEATORIEDAD Y PROBABILIDAD EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA

Hola, espero que te encuentres bien. Estoy aquí para solicitarte un favor. Me gustaría que compartieras conmigo lo que tú piensas con respecto a las palabras *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*, las cuales posiblemente has escuchado y/o utilizado en la vida diaria. Te voy a agradecer mucho que escribas todo lo que se te ocurra. No te preocupes en pensar si lo que escribes es correcto o no, te aseguro que lo que escribes será valorado como muy importante por mí. Gracias por ayudarme.

Nombre: \_\_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_\_

1. ¿Has escuchado EL TÉRMINO AZAR? Escribe todo lo que se te ocurra por favor.
2. ¿Has escuchado EL TÉRMINO ALEATORIEDAD? No te ahorres palabras.
3. ¿Has escuchado EL TÉRMINO PROBABILIDAD? Escribe, escribe, escribe.
4. Escribe UN RELATO (una historia real o inventada, un cuento, una situación de la vida..., lo que quieras), en el cual utilices la palabra AZAR, escribe todo lo que se te ocurra.
5. Luego, escribe UN RELATO en el cual utilices la palabra ALEATORIEDAD, escribe todo lo que desees.
6. Ahora, escribe UN RELATO en el cual utilices la palabra PROBABILIDAD, escribe todo lo que quieras.
7. Escribe por favor UN PROBLEMA en el que utilices la palabra AZAR.
8. Escribe por favor UN PROBLEMA en el que utilices la palabra ALEATORIEDAD.
9. Escribe por favor UN PROBLEMA en el que utilices la palabra PROBABILIDAD.

Has sido muy amable conmigo al ayudarme y compartir tus ideas, te lo agradezco mucho, chao.



## **ANEXO 2. Azar, Aleatoriedad y Probabilidad: Los textos de los Estudiantes.**

*A medida que los investigadores recién vueltos reflexivos tratan de aceptar las subjetividades de la ciencia y el papel ineludible del investigador en la creación del conocimiento, nosotros anhelamos tanto un desapego fresco (pero no frío) del compromiso de los sujetos-coinvestigadores-informantes-respondedores participantes en nuestros estudios, al igual que un compromiso cálido (pero no demasiado caliente con ellos).*

(Sandelowski, 2003)

En este anexo se presentan las manifestaciones escriturales de los estudiantes y las características en que estas producciones se realizaron.

Al iniciar el estudio del tema de la probabilidad con un grupo de estudiantes de décimo grado, en una institución educativa de la ciudad de Medellín, constituido por 38 estudiantes entre hombres y mujeres de estratos 1, 2 y 3, se propuso las actividades escriturales expresas en el instrumento anexo a este informe. Se dispuso de un tiempo de 110 minutos para que los estudiantes realizaran sus textos escritos de manera individual y sin ningún tipo de participación por parte de los investigadores, a excepción de la lectura del instrumento.

Los textos fueron realizados por los estudiantes con su propia letra y, luego, se transcribieron en formato electrónico por los investigadores. La reproducción se realizó conforme a los textos, por lo que se transcriben entre comillas, pero con las siguientes restricciones: **Los nombres de personas, de “bandas” y de lugares fueron necesariamente modificados.**

Es de anotar que tales cambios no alteran, de ninguna manera, la interpretación realizada de los textos escritos.

**TABLA 3.**

*Manifestaciones escriturales de los estudiantes.*

<b>AZAR, ALEATORIEDAD Y PROBABILIDAD: Significados personales en estudiantes de Educación Media</b> <b>LOS TEXTO DE LOS ESTUDIANTES</b>		
<b>AZAR</b>		
<b>¿Has escuchado EL TÉRMINO AZAR? Escribe todo lo que se te ocurra por favor.</b>	<b>UTILIZACIÓN CONTEXTUAL</b> <b>Escribe UN RELATO (una historia real o inventada, un cuento, una situación de la vida..., lo que quieras) en el cual utilices la palabra AZAR, escribe todo lo que se te ocurra.</b>	<b>Escribe UN PROBLEMA en el que utilices la palabra AZAR</b>
<p>[1] “Los juegos de azar son por ejemplo el bingo, las cartas, las loterías”</p> <p>[2] “Yo entiendo por el término azar todos los juegos con que uno se divierte como cartas, dominó, ajedrez, parques y otros mas”</p> <p>[3] “Son juegos realizados en casinos”</p> <p>[4] “El azar es como la suerte nunca saber si vas a ganar”</p> <p>[5] “Creo que es tirar a la suerte y es hacer algo sin antes haber pensado, apostar.”</p> <p>[6] “Cuando uno hace una evaluación y no estudio pero si la gana es a la suerte”</p> <p>[7] “Lo podría</p>	<p>[28] “Hace algún tiempo por culpa de los juegos de azar había perdido toda su fortuna una joven”</p> <p>[29] “Había una vez una señora muy rica y poderosa la cual tuvo un solo hijo, ella se casó muy joven pero muy enamorada, el día de su aniversario falleció su esposo y la dejó sola con su hijo debido a esto la señora se refugió en el juego y todos los días le apostaba al azar a veces ganaba otras perdía pero llegó un momento en el q” se obsesionó por el azar y terminó perdiéndolo todo.”</p> <p>[30] “Pasó por una mesa donde habían</p>	<p>[48] 3 estudiantes no escriben</p> <p>[49] “No tengo muy claro que es azar”</p> <p>[50] “Dos mesas de azar equivalen cada una a 50% pero si dos dados equivalen al 60% cuántas mesas de azar me hacen falta para alcanzar el mismo porcentaje de los dados?”</p> <p>[51] “Un juego de parqués, he entrado dos fichos y mi adversario 3, quién ganará?”</p> <p>[52] “Los juegos de azar son un problema social porque se vuelve un vicio en algunas personas, esto hace que pierdan su dinero, generando así mas pobreza.”</p>

<p>interpretar como algo que queda como a la suerte”</p> <p>[8] “Es como la suerte de que algo, cualquier cosa le toque a alguien”</p> <p>[9] “Es como dejar alguna decisión importante a la suerte, a la ligera sin consultar o averiguar en pocas palabras mucha gente dice; sabes esta decisión la tomé al azar”</p> <p>[10] “Hacer algo a la suerte, que caiga lo que caiga.”</p> <p>[11] “Es jugar a tener suerte”</p> <p>[12] “Es repartir algo sin mirar a quien. Escoger por simple suerte entre varias cosas.”</p> <p>[13] “Pues me parece que el término es aquel que dice algo sobre suerte o fortuna, y creo que está acompañada con la probabilidad, porque la probabilidad de uno ganarse un chance es poca, ya que las pelotas son escogidas al azar.”</p> <p>[14] “Es como elegir cosas sin saber bien cual vamos a escoger o cual nos</p>	<p>juegos de azar como cartas y el jugo mucho tiempo, luego llegó a casa sin dinero”</p> <p>[31] escogencias al azar</p> <p>[32] “El juego de azar más conocido es el chance”</p> <p>[33] “Habían 5 distintos sitios que visitar;... los 5 sitios tenían la misma votación... como no nos ponemos de acuerdo tocará decidir al azar. Entonces la profesora puso los 5 nombres de los sitios en pequeños trozos de papel”</p> <p>[34] “Es una historia muy interesante pues cuando estuve cursando el 9 grado en el colegio, en los exámenes bimestrales el examen de inglés tenía unas preguntas que no entendía, y para no dejar el examen en blanco tachaba preguntas al azar”</p> <p>[35] “Si no estudio dejo todo al azar”</p> <p>[36] “Al no estudiar se deja el futuro al azar”</p> <p>[37] “El día viernes 09 de abril de 2010 exactamente a las 10:28 a.m. sale de su casa Jhon, y se da</p>	<p>[53] “Los juegos de azar son un problema porq” se le va toda la plata jugando o se gana un problema con los demás o se puede ganar una muerte por deber plata sobre eso”</p> <p>[54] “Uno de los problemas más grandes de hoy en día es el azar, la afición a estos juegos ha hecho q’ muchos pierdan lo que tienen y hasta lo que más aman, cómo se podría solucionar; la mejor solución es la prohibición del juego, como en muchas ciudades, y así son más prosperas más alejadas de las drogas y la prostitución.”</p> <p>[55] “Mi papá lo perdió todo en los juegos de azar de un casino en el centro, ahora no tenemos donde vivir”</p> <p>[56] “Para alguien que tiene problemas severos con los juegos de azar o de casinos si quieren salir es bueno que tengan mucha fuerza de voluntad y no lo dejen todo al azar”</p> <p>[57] “Si Carlos va al casino toda la semana y cada día gana \$900.000, ¿cuánto gana en el mes?”</p> <p>[58] “El azar es una adicción q” coge las</p>
--	--	--

<p>va a salir”</p> <p>[15] “Escoger entre varios, sin mirar cualidades, fuerza ni nada por el estilo, solo el que fue, fue.”</p> <p>[16] “Dejar que todo transcurra sin preocuparnos y sin importar”</p> <p>[17] “Es cuando uno hace algo al azar cuando uno hace algo sin saber.”</p> <p>[18] “Es repartir un objeto o cosa sin orden alguno”</p> <p>[19] “Yo he escuchado que azar es dar algo sin importar a quien”</p> <p>[20] “Es escoger algo sin fijarse en algún detalle”</p> <p>[21] “He escuchado que es una rama de la matemática que estudia la probabilidad de que algo suceda o no.”</p> <p>[22] “Es repartir un objeto o cosa sin orden alguno”</p> <p>[23] “Término designado para decir que cualquier persona podría hacer algo”</p> <p>[24] “Es donde hay muchas posibilidades y se escoge una sin razón alguna”</p> <p>[25] “Es como cuando uno tiene diferentes</p>	<p>cuenta que su amigo William está siendo golpeado por dos tipos; Jhon al ver tal acontecimiento corre a ayudar a su amigo William repartiendo puños y patadas al azar, Jhon logró asustar a los agresores logrando así socorrer a su amigo...”</p> <p>[38] “Erase una vez un hombre q” llegó a la tierra llamado Jesús, el quería q” todos confiáramos en el, porq” era el hijo de Dios, pasaban los días y le iba bien porq” ya creían y confiaban en el. Hasta q” un día como siempre pasa la envidia de los Judíos los llevó a acabar con la vida de Jesús, lo aporrearon, le colocaron una corona de espinas y le daban latigazos hasta colocarlo débil, le quitaron la ropa y lo crucificaron y cuando murió empezaron a jugar y apostar sus prendas y desde ese día Dios detesta los juegos de azar”</p> <p>[39] “Los soldados romanos lo despojaron de sus vestiduras y por</p>	<p>personas o bueno la mayoría q” les gusta el juego”</p> <p>[59] “Por culpa de los juegos de azar se han encontrado muchos problemas que por culpa de una apuesta han matado a mucha gente estos juegos deben parar o hay que saberlos jugar”</p> <p>[60] “Por culpa de los juegos de azar muchas personas tienen una adicción”</p> <p>[61] “Si tu vas perdiendo toda tu fortuna en un juego de azar q” harías seguirías jugando hasta perder toda tu fortuna o te retirarías”</p> <p>[62] “Había una vez un niño que se puso a jugar póker por internet, entonces ganó varios juegos de azar, poco después ganó mucho dinero, entonces terminó de jugar, y se fue con su madre a cobrar el premio, pero se lo negaron que porque tenía que ser mayor de edad; entonces la mamá hizo una acción de tutela, que porque así el niño se menor de edad “ganó” y ahí ya no se puede hacer nada, mucho tiempo después el fallo del juez fue a favor suyo.”</p>
---	--	---

<p>cosas que quiere mucho pero que solo puede tener una sola, entonces hay es donde podemos decir que nos toca al azar.”</p> <p>[26] “Azar es un término utilizado cuando te encuentras en dificultad, con miedo, desesperación, asustado de algo y cuando crees que algo está malo o bueno, es como una expectativa al saber si, si es cierto o no”</p> <p>[27] “Azar un pollo para comer”</p>	<p>ofenderlo echaron al azar sus prendas”</p> <p>[40] “Mi hermana es una persona que todo lo deja al azar ya que ella dice que la suerte siempre anda con ella, yo creo que por estar escogiendo al azar terminó con ese novio que ni siquiera lo parece mas bien parece el hijo pero bueno si tanto le gusta ojala no la decepcione”</p> <p>[41] “Había una vez cuatro niños jugando pico botella. A uno de ellos se le ocurrió esta idea porque era muy buena y además eran dos mujeres y dos hombres Tes al azar. Ponían a girar la botella si caian los dos hombres se daban la mano como buenos amigos que son, pero si caia un hombre y una mujer se daban un besito de lengüita de 5 segundos...”</p> <p>[42] “Cierta día nos preparábamos para jugar un partido de futbol, pero todos querían estar a su manera y de esa forma no podíamos jugar, Yo tomé la palabra y dije que tal y entre Andrés y Yo</p>	<p>[63] “Dos chicos estaban disputando por ver quien se quedaba con una chica muy bonita, y uno de ellos propuso lanzar una moneda al azar, uno escogió cara pero el joven que tiró la moneda ganó y el fue y se quedó con la chica”.</p> <p>[64] “Si no sabe lo que significa una palabra, su utilización queda al azar”</p> <p>[65] “Se tienen 5 gallinas, se desea saber cual de ellas pones más huevos en la semana. Escoge una al azar.”</p> <p>[66] “Chivas mató al gato porque le ganó un buen juego de azar, que estaba en juego su auto y no lo iba a dejar perder y por eso lo mato”</p> <p>[67] “Mi tío un día por escoger todo al azar salió escogiendo ropa de mujer y ahora no sabe que hacer como hace para cambiarla porque le da vergüenza”</p> <p>[68] “La violación a menores es un problema q” afecta a muchas personas en Colombia, durante los últimos años se a dicho q” sería bueno dar cadena perpetua a los violadores, pero la ley no se interesa en esto,</p>
---	---	---

	<p>escogemos al azar a nuestros compañeros de equipo. Todos se pusieron de acuerdo y quedaron de acuerdo. Felipe y Yo escogimos un buen equipo al azar para cada uno y así pudimos jugar un buen partido”</p> <p>[43] “Habían 5 sitios que visitar pero no había acuerdo entonces los anotaron en pequeños trozos de papel y así escogieron al azar a donde ir”</p> <p>[44] “Cuando estamos jugando cartas las repartimos sin saber que nos va a tocar, todo ahí queda como al azar o la suerte de uno”</p> <p>[45] “Cuando nos fuimos a venir a Medellín fue todo de improviso de un momento simultaneo, lo cual somos desplazados y aquellas personas que hicieron esto nos estaban buscando y nosotros nos escapamos y nos venimos al escondido. Sentía azar porque en el momento que veníamos, escondidos dentro de un furgón, sentía que ya nos</p>	<p>en pocas palabras eso quiere decir q” la integridad de las personas se encuentra la azar sin quien castigue a los corruptos violadores”</p> <p>[69] “Luisa y Julián escogieron un disco para bailar al azar, pero a Pedro no le gustó ese disco. Luisa puso \$500, Julián puso \$200 y Pedro puso \$1200, para el CD, ¿entonces quien tiene la mayor parte del CD?”</p> <p>[70] “Debo ir a una fiesta y tengo seis posibles trajes ¿Cuál me pongo? Escogeré al azar”</p> <p>[71] “Muchas veces por nosotros escoger al azar respuestas de exámenes del colegio o decisiones al azar podemos obtener una mala nota o un problema”</p>
--	--	---

	<p>iban a encontrar aquellas personas y nos harían males a nuestra familia, lo cual era muy probable”</p> <p>[46] “Un gran juego. Mis amigos Mateo y Wilman eran muy buenos estudiantes pero no les gustaba algunas materias ya que a ellos física, matemáticas y química les parecía muy aburridor, pero ellos no se daban cuenta de que estaban dejando sus futuros al azar, al final del período ello se encontraban muy triste porque siempre perdían las mismas materias, pero se preguntarán ustedes cual era el mayor motivo: ellos nunca entraban a ninguna de estas clases ya que preferían jugar cartas o dominó, de hay parte el gran problema puesto que por los juegos de azar dejan su vida al azar”</p> <p>[47] “Había una vez una niña que era muy pobre pero muy pobre que no tenía para comer nada luego se encontró con unas personas y le dieron algo de comer. Ella vivía en una casita de</p>	
--	---	--

	bolsa y cuando llovía se mojaba. Cuando un día amaneció y se levantó se fue para la calle iba caminando cuando se encontró una maleta con mucho dinero ese día tenía mucha azar porque luego ella compró una boleta y se la ganó fue muy feliz”	
<b>ALEATORIEDAD</b>		
<b>Has escuchado EL TÉRMINO ALEATORIEDAD? No te ahorres palabras.</b>	<b>UTILIZACIÓN CONTEXTUAL</b> Escribe UN RELATO en el cual utilices la palabra ALEATORIEDAD. Escribe todo lo que desees.	<b>Escribe UN PROBLEMA en el que utilices la palabra ALEATORIEDAD</b>
<p>[72] 11 estudiantes afirman no haberlo escuchado</p> <p>[73] “Si la he escuchado pero no me acuerdo que significa”</p> <p>[74] “De escucharlo si, y en muchas partes pero de tenerle un significado específico no se nada”</p> <p>[75] “Entendí que es un objeto o cosa que gira.”</p> <p>[76] “Es girar. Es algo rutinario.”</p> <p>[77] “Para mí es algo en círculos.”</p> <p>[78] “Es algo que se mantiene en constante movimiento como los</p>	<p>[93] 7 estudiantes no escriben</p> <p>[94] 7 estudiantes manifiestan no saber</p> <p>[95] “Dar volantes en el centro en forma aleatoria porque la gente pasa muy seguido”</p> <p>[96] “A mí me llama la atención; las personas q” exponen sus vidas al sol y al agua repartiendo volantes aleatoriamente para ganarse un peso para su familia, para comer y darle estudio a sus hijos.”</p> <p>[97] “Cuando voy por la calle, que veo los chicos que aleatoriamente reparten sus volantes</p>	<p>[110] 10 estudiantes no escriben</p> <p>[111] 9 estudiantes afirman no saber</p> <p>[112] “Este año en el Emaús formaron los grupos por aleatoriedad, lo cual generó un gran problema, porque los estudiantes quedaron separados de sus amigos y quedaron juntos buenos y malos estudiantes.”</p> <p>[113] “Una pelota que se fue con aleatoriedad y venia un bus e iba un taxi, los conductores vieron la pelota y casi que se chocan, no obstante que había un policía allí y los salvó.”</p> <p>[114] “Para alguien que</p>

<p>electrones en su órbita, o como la tierra que es mantiene en constante movimiento. Giratorio.”</p> <p>[79] “La entiendo como algo que está pasando de vez en cuando, algo que puede ocurrir”</p> <p>[80] “Que sucede muy seguido”</p> <p>[81] “Si lo he escuchado, pero no tengo muy claro su significado, según lo poco que he escuchado es algo que indica continuidad que se hace en el orden que se ha establecido.”</p> <p>[82] “Escoger algo sin importar el orden”</p> <p>[83] “Es mezclar algo para no seguir la rutina”</p> <p>[84] “Es seguir adelante en la rutina que llevemos, un ejemplo podría estar en un video juego que diga “consiga las llaves aleatoriamente y podrá encontrar a la reina””</p> <p>[85] “Es como tener todo por igual”</p> <p>[86] “Unirse a algo o a alguien, compartir algo”</p>	<p>sin importarles raza ni color me da alegría ver que hasta en los trabajos mas humildes existe gente que respeta la diferencia y el ser único”</p> <p>[98] “Lanzar una moneda”</p> <p>[99] “Caerse aleatoriamente”</p> <p>[100] “Desplazarse aleatoriamente entre lugares, porque toca”</p> <p>[101] “Dos parejas jugaron aleatoriamente cambiar de pareja, hasta que al final se quedaron con parejas diferentes a la inicial”</p> <p>[102] “Muchas personas viven simultáneamente o sea aleatoriamente en diferentes ciudades ya que su situación económica es sorprendente.”</p> <p>[103] “Cuando se inicia un torneo de ajedrez de más de 50 personas se utiliza la aleatoriedad para formar los encuentros”</p> <p>[104] “Un profesor de sociales de la universidad armó un equipo para buscar un tesoro guiados por un mapa, debieron afrontar muchos obstáculos, uno de ellos era elegir una combinación, la cual era de forma aleatoria”</p>	<p>está en una máquina traga monedas el resultado es aleatorio, por esto deberá buscar otra forma de ganar dinero para compartirlo con su familia”</p> <p>[115] “Hoy en día las personas no pueden caminar aleatoriamente ya que en los barrios y cuadras se ha visto mucha violencia ya prohíben pasadas de un lugar a otro.”</p> <p>[116] “Tengo que hacer muchas tareas y como no tengo tiempo para hacerlas todas. Tengo que hacerlas aleatoriamente y el problema es que así no me puedo concentrar”</p> <p>[117] “Seguir los puntos con aleatoriedad y encontrarás una figura luego mover tres partes y hacer que quede igual”</p> <p>[118] “Un día hubo una confrontación entre dos bandas de Medellín y hubo tiros aleatoriamente, de corrido, no paraban de disparar; pero por fortuna llegó una gran tropa de la policía y finalizó esto.”</p> <p>[119] “Un muchacho compró un Ipod el cual tenía una opción que</p>
--	--	--

<p>[87] “Pues pienso que debe de estar relacionado con las matemáticas, pero no sé de qué forma; podría ser, una forma de organización, posiblemente de números. He escuchado o visto este tema, en el PC, en el reproductor de Windows media. Donde aparece como una combinación de colores reproduciéndose en la pantalla.”</p> <p>[88] “Es como hacer algo continuo, como por ejemplo uno esté reproduciendo un video de alguna película, pero sean varias películas en una, uno lee ahí dice: Desea usted reproducir todas las películas aleatoriamente, y uno escoge si si o si no; o sea es como reproducir algo de corrido.”</p> <p>[89] “Es como coger las cosas en desorden, uno coger los números de 1 al 20 y cogerlos todos pero en desorden”</p> <p>[90] “Es también escoger o elegir sin</p>	<p>[105] “Un día Susana se perdió, la cual preocupada organiza piedra aleatoriamente para orientarse, después de un rato se había dado cuenta que había puesto las piedras con la aleatoriedad perfecta, con lo cual sus piedras vistas desde arriba parecían una verdadera obra de arte salida de la nada”</p> <p>[106] “Un joven fue al casino y no sabía en cual máquina apostar o jugar y decidió escoger de una manera aleatoria y lo hizo por medio del tin mare de don pin güe tutara manga esta maquina fue”</p> <p>[107] “Cuando yo tenía un novio, lo quería mucho y al parecer el también... pasaron dos meses y según el me quería, pero a los tres días de haberme dicho esto lo encontré con otra persona y no precisamente hablando. Al día siguiente el fue a mi fue a mi casa a buscándome diciéndome que me quería y mucho pero que con aquella otra persona sentía lo mismo. Él sentía</p>	<p>decía “aleatorio” y como no sabía qué era eso, lo regaló”</p> <p>[120] “Nosotros escogeremos de una forma aleatoria con quien juntarnos o mantenernos porque si seguimos malos pasos nos traerá problemas u consecuencias”</p> <p>[121] “Para alguien que está en una máquina traga monedas el resultado es aleatorio, por esto deberá buscar otra forma de ganar dinero para compartirlo con su familia”</p> <p>[122] “Yo quiero volver a Cali pero probablemente esta personas nos sigan buscando.”</p> <p>[123] “Mi amiga Tatiana tiene un gran problema en su casa y en su relación con los demás ya que ella se ha vuelto muy agresiva y violenta, un poco mal genida y amargada ya que está cansada de llevar una vida tan aleatoria y varias veces ha intentado quitarse la vida no sabemos que solución le podemos dar a esta problema y como la podemos ayudar antes de que ella haga algo de lo que se pueda arrepentir.”</p>
--	---	--

<p>precisar bien lo que nos tocará o lo que nos saldrá”</p> <p>[91] “Creo que es la manera en la cual se elige una posibilidad en el azar”</p> <p>[92] “Yo relaciono la palabra aleatoriedad como casi lo mismo que la palabra azar, me suenan familiares porque la palabra aleatoriedad tiene como raíz la palabra aleatorio y aleatorio es un sinónimo de azar quedaría todo casi lo mismo como si todo fuera como a la suerte o como si las cosas cambiaran depende de la persona”</p>	<p>aleatoriedad porque nos quería a las dos y aunque no es posible se quería quedar con estas dos mujeres”</p> <p>[108] “Mi mamá me regaló un mp4 y hay la música se puede escuchar normal como está en la lista de música o aleatoriamente.”</p> <p>[109] “En una noche muy oscura una familia se fue a pasear para Amagá iban muy contentos y entusiasmados de repente cuando iban pasando por un puente vieron algo aleatorio y se asustaron mucho y pararon en un estadero cerca y allí se quedaron 1 hora ya después siguieron el camino, e iban llegando ya al pueblo de Amagá cuando vieron una niña en un aro aleatorio y se fueron a ver como la podían ayudar pero cuando ellos se acercaron la niña se desapareció y ellos llegaron a la finca y se despreocuparon de lo que había pasado y hicieron una fiesta y estaban muy felices”</p>	
---	---	--

<b>PROBABILIDAD</b>		
<b>¿Has escuchado EL TÉRMINO PROBABILIDAD? Escribe, escribe, escribe.</b>	<b>UTILIZACIÓN CONTEXTUAL Escribe UN RELATO en el cual utilices la palabra PROBABILIDAD. Escribe todo lo que quieras.</b>	<b>Escribe UN PROBLEMA en el que utilices la palabra PROBABILIDAD</b>
<p>[124] “El número de oportunidades que tiene en algo una persona”</p> <p>[125] “La probabilidad es la posibilidad de que algo ocurra o que pueda suceder, que se puede interpretar con números”</p> <p>[126] “Tiene que ver con que alguien pueda ascender por cargo laboralmente”</p> <p>[127] “Posibilidad de que esté pasando algo”</p> <p>[128] “Puede tener algo o saber algo pero queda en duda, no sabe si es verdad o no, o si le va a funcionar o no, como en un trabajo van a que le hagan la entrevista, llega a la casa como en duda porque no sabe si le van a dar el trabajo o no.”</p> <p>[129] “Se puede decir que es algo definitivo y a la vez no lo sea ejemplo yo decir es</p>	<p>[155] 1 estudiante no responde</p> <p>[156] “Lanzar una moneda al aire y ver que sale es probable que salga cara o sello”</p> <p>[157] “Por la radio dan números que probablemente ganen en el chance esta noche”</p> <p>[158] “Existe la probabilidad de q” muy pronto salga de estudiar y consiga un buen trabajo para salir adelante y sacar a mi familia adelante”</p> <p>[159] “En el colegio hice un examen, hay probabilidad de que lo gane porque de 15 preguntas creo que solo me equivoque en 3, ya que estudie mucho para poder hacer la mayoría de respuestas buenas.”</p> <p>[160] “Había una vez una niña que no era muy buena para la matemática y su profesor le dijo no hay probabilidad de que pases al otro grado.</p>	<p>[181] 2 estudiantes no escriben</p> <p>[182] “Un carro viaja 3 días. Cada día gasta \$600.000 de gasolina y tiene que viajar 7 días. ¿Probablemente cuánto gastó en gasolina en los 7 días?”</p> <p>[183] “Hay probabilidad de que yo no sepa nada de matemáticas ni de nada”</p> <p>[184] “En el Popular #1 hubo un tiroteo en el que Juan resultó herido, 3 balas en el estómago, hay un 89% de probabilidad que muera.”</p> <p>[185] “Que uno se ponga a apostar algo sin posibilidad de ganar”</p> <p>[186] “Para alguien que debe pasar un examen con una probabilidad muy alta, deberá estudiar muy bien”</p> <p>[187] Hay probabilidad de que muchas mujeres mueran de cáncer</p> <p>[188] “Un ejemplo muy consistente es cuando</p>

<p>probable que si se encuentre ella allí”</p> <p>[130] “Posible, cierto, probable o 100% verdadero”</p> <p>[131] “Es poder probar algo sobre algo o alguien”</p> <p>[132] “Es el número de oportunidades que tiene en algo una persona”</p> <p>[133] “Posiblemente es una posible respuesta”</p> <p>[134] “Un más o menos para algo”</p> <p>[135] “Un quizás, un tal vez”</p> <p>[136] “Es decir que algo es posiblemente cierto”</p> <p>[137] “Es cuando decimos algo eso puede ser verdadero o falso”</p> <p>[138] “Es una respuesta que no sabemos si es verdadera o falsa”</p> <p>[139] “Es cuando uno tiene la probabilidad de ganar o perder alguna cosa”</p> <p>[140] “Es tener información o estadística de algo sucedido. Yo también he escuchado que mucha gente la utiliza para referirse hacia el futuro o a lo pasado. Ejemplo es</p>	<p>Pero la niña al escuchar esto se puso las pilas a estudiar al fin de año el profe le dice has aprobado pasas al grado siguiente.”</p> <p>[161] “La muerte de Pepe Liso de la 20 a sido muy desamparada ya que se metió todo güelido con la musaraña y lo mandaron a matar hay probabilidad de que los de la 20 que están todos ofendidos se pongan a dispararles a los de musaraña, pero ellos saben que no se pueden poner a inventar que la guerra es con esos gamines de los ripios”</p> <p>[162] “El año pasado cuando nos dijeron que existía la probabilidad de que algunos no pasaran al SENA a todos nos dio una pequeña sensación de miedo y ansiedad ya que todos queríamos estar en la media técnica.”</p> <p>[163] “Para nadie es un secreto el sufrimiento q” tienen las familias de los secuestrados, incluso ellos mismos, ya q” hay personas inescrupulosas y tan duras de ♥ q” son capaces de quitarles la</p>	<p>una persona va a tener un hijo pero no sabe que va a tener es probable un hombre o una mujer”</p> <p>[189] “¿Si probablemente tienes cáncer qué harías, ir al médico para curarte o hacerte el que no sabes nada de eso y quedarte con la duda de morirte pronto o no?”</p> <p>[190] “Sobre las mujeres que quedan embarazadas. Puede ser porq” sus novios, maridos, esposos no les responde y a lo último sale con la probabilidad de un 99.9% de q” si son hijos de ellos.”</p> <p>[191] “El verde está jugando muy mal y no hay ninguna probabilidad de que quede campeón, los jugadores le tienen que poner mas güevas para poder lograr el título”</p> <p>[192] “En el centro de investigación de New York existe la probabilidad de un virus mortal pero no se sabe cual es, ni cual es su cura”</p> <p>[193] “En nuestra comuna 3 se presenta muchos enfrentamientos entre</p>
---	--	--

<p>probable que regrese el martes”</p> <p>[141] “A veces nos encontramos en problemas y es muy difícil solucionarlos, pero tenemos esa esperanza de que alguien o algo nos ayude y podamos superarlos. Entonces sería como reemplazar la palabra esperanza por probabilidad”</p> <p>[142] “Algo que puede ser posible, una persona que crea que tal cosa puede ser verdad”</p> <p>[143] “Es como decir: puede ser, de pronto pudo haber sido”</p> <p>[144] “Algo que puede ocurrir o a la vez no. Es algo donde se duda. Algo que puede ser y a la vez no”</p> <p>[145] “Es que dice cuán posibilidad habría de algo. Creo que las palabras posibilidad y probabilidad son sinónimas, esta palabra la he escuchado mucho, no obstante no se como identificarla en el momento de la respuesta. Un ejemplo sería en una clínica que el doctor</p>	<p>liberta y la felicidad a otras personas y a ellas mismas igualmente. Lo bueno es que ahora todos ellos tienen la probabilidad de ser libres e igualmente los integrantes de las fuerzas armadas revolucionarias de Colombia (FARC) Los colombianos esperamos q” todos los q” están privados de la libertad vuelvan”</p> <p>[164] “Su mamá se iría hacer unos exámenes porque había una probabilidad de que se le detectara un cáncer que si no se le trataba con tiempo podría hasta llegar a fallecer pero su maestro le dijo que solo era una probabilidad algo no muy seguro que tuviera fe en que Dios no permitiría que a su madre le pasaría algo tan penoso ella se fue para su casa un poco mas tranquila. Al otro día llegó directo donde su maestro y le contó que gracias a Dios el examen le salió negativo y muy feliz continuó estudiando”</p> <p>[165] “Un doctor le dijo a la familia de un paciente que está muy mal tenía la</p>	<p>las pandillas, lastimosamente han muerto muchas personas a causa de este problema, la única probabilidad es q” las autoridades vivan más pendientes de la comunidad”</p> <p>[194] “Carolina una adolescente estaba muy enferma, todo el tiempo tenía náuseas, y engordó mucho, probablemente estaba en embarazo, tenía que salir de esa preocupación así que se hizo una prueba lo confirmó sus padres la botaron de su casa, sin donde dormir o vivir.”</p> <p>[195] “Tengo 10 pimpones azules, 5 rojos, 15 morados y tres verdes en una bolsa, ¿qué probabilidad tengo de sacar un pimpón verde de la bolsa”</p> <p>[196] “Un automóvil parte del reposo con una velocidad de 12 Km/h, cuál es la probabilidad para que el carro descienda su velocidad un 10%?”</p> <p>[197] “Tengo un problema en el colegio que no se si gano o pierdo una materia pero no se si tendré la probabilidad de ganar</p>
---	---	--

<p>le diga al os familiares “la probabilidad o la posibilidad de que su hijo se salve es nula””</p> <p>[146] “Es una hipótesis que intenta predecir cual posibilidad del azar es la más posible de ser escogida”</p> <p>[147] “Podría utilizar la palabra posible, cierto, probable o 100% verdadero”</p> <p>[148] “Es cuando es mejor ganar la materia con números que con letras porque hay más probabilidad”</p> <p>[149] “Creo que esta probabilidad se haya de acuerdo a datos; lo deduzco porque he visto este tema de matemáticas, en años anteriores. Se puede expresar por %. Ejemplo la probabilidad de que un avión, tenga un accidente es del 98%.”</p> <p>[150] “Se haya de acuerdo a datos, se presenta en porcentajes”</p> <p>[151] “Si eso siempre se ve en todas las materias ya que para mi probabilidad es un porcentaje de algo</p>	<p>probabilidad que muriera le dijo a su familia eso pero al contrario la probabilidad fue de que viviera vivió se casó con una mujer los quiso tuvo una hija y un hijo envejeció son su mujer y murió”</p> <p>[166] “Un niño en una escuela no tenía probabilidades de pasar el año, entonces el niño hizo hasta lo imposible por lograrlo, pero como dicen uno lo que siembra lo cosecha. El cosecho tener malas y al final se tuvo que esforzar mucho. ”</p> <p>[167] “Un niño estaba indeciso en la respuesta de su examen de matemáticas. Entonces el niño pensaba que probablemente la respuesta podría hacerla si hacia los procedimientos y si el niño hizo sus procedimientos y ganó su examen de matemáticas.”</p> <p>[168] “Cuando lanzamos un solo dado la probabilidad de sacar dos es uno entre seis.”</p> <p>[169] “Hay una sola probabilidad de ganar la lotería, pero Pedro</p>	<p>que debo hacer para recuperarla. Si no tengo el suficiente valor para hablar con él.”</p> <p>[198] “Si lanzas dos dados ¿cuál es la probabilidad de sacar 7 puntos?”</p> <p>[199] “Un profesor estaba desconfiado de que un estudiante ganara una evaluación, pero otro docente le dijo “uno no sabe, existe una gran probabilidad de que ese joven logre ganar ese examen”</p> <p>[200] “El problema de esta palabra es que nos dice que hay dos respuestas, pero no nos ayuda a ver cual es la respuesta correcta.”</p> <p>[201] “La lotería es un gran problema, un juego de azar donde la probabilidad juega, y en el que cientos de personas depositan toda su confianza, para luego decepcionarse, por eso no se debe comprar”</p> <p>[202] “Probablemente me gane la beca en la universidad, pero creo que no me fue bien en los exámenes”</p> <p>[203] “De cuántas maneras se pueden</p>
---	--	---

<p>por ejemplo cuando califican en una materia entonces que esta cosa tiene 20% y que la otra cosa tiene 80% entonces tiene cierta probabilidad como de ganar como de perder.”</p> <p>[152] “Es el porcentaje o certeza de saber algo o si perdiste o ganaste algo.”</p> <p>[153] “Es cuando crees que es cierto algo pero no estás 100% seguro y una u otra cosa para ti es incorrecta.”</p> <p>[154] “Es cuando uno hace como una encuesta para saber algo que le guste a las personas en general.”</p>	<p>la logró al comprarla”</p> <p>[170] “Cuando mi abuela juega chance la probabilidad de ganar es de 1 en 10000 ya que ella sólo hace un número”</p> <p>[171] “A Yuli en Santa Marta le iba muy mal en el estudio, pero se dio cuenta que había una probabilidad que en Medellín le iba bien y ganaba todas las materias”</p> <p>[172] “María es una joven de 18 años es una chica extrovertida que le gusta mucho salir con sus amigos, a ella le encanta bailar y en una de esas noches loca tuvo relaciones con un joven q” conoció, al otro día contuvo con su novio... al cabo de 4 meses se empezó a sentir mal y su amiga Patricia le preguntó María q” tienes y ella le dice no se algo me cayó mal tengo ganas de trasbocar y me duele la cabeza Patricia le pregunta última mente has dormido mucho y hay una probabilidad muy alta de que estés embarazada. Ven vamos a hacernos una prueba. La cual salió positiva, María</p>	<p>sentar 4 persona en una banca de 4 puestos, ¿Qué debo hacer para solucionar? Usar probabilidad”</p> <p>[204] “La probabilidad tiene como todo sus ventajas y desventajas no se sabe exactamente algo siempre va haber cierto porcentaje de perder o ganar algo”</p> <p>[205] “Existen las probabilidades de que muchas mujeres mueran de cáncer.”</p> <p>[206] “En nuestro barrio hay probabilidades que hayan muchas víctimas por el conflicto armado que está pasando”</p> <p>[207] “Es muy probable que muchos alumnos pierdan el año ya que se pierde con dos materias, y muchos alumnos son muy perezosos pero con esfuerzo se puede ganar”</p> <p>[208] “Quiero jugar chance porque necesito plata, hoy por la radio dieron unos números que probablemente ganen, entre ellos: 9245, 351,4001 y 2730 en el que más hicieron énfasis fue en el 351, que número ganara.”</p>
---	---	---

	<p>llorando recibe la noticia Patricia le pregunta quién es el padre. María le dice no lo se estuve con dos hombres el mismo día. María te tengo la solución pues para mí hay un porcentaje del 50% q" sea de tu novio o de otro q" voy hacer... no se habla con ellos y se hacen una prueba de ADN y salen de la duda y hay no tendrán dudas porque la probabilidad de que falle es casi nula"</p> <p>[173] "María pensó y pensó porque se sentía tan maluca y tantos días de seguido y llegó a una conclusión ¡estaré en embarazo! Es una probabilidad"</p> <p>[174] "Gracias a que pongo atención a todo me va muy bien mi probabilidad de ganar la materia es del 95%"</p> <p>[175] "En una familia hay probabilidades de salir a pasear... porque el hombre de la casa está ganando una muy buena cantidad de dinero"</p> <p>[176] Estaban dos jóvenes hablando acerca de un partido de futbol, entonces estaban hablando de</p>	
--	---	--

	<p>un jugador que debió haber convertido un gol pero lo botó; entonces uno le dice la otro “Que jugador tan malo” y el otro le responde “probablemente fue que le pegó mal””</p> <p>[177] “Erase una vez dos jóvenes muy soñadores y siempre se mantenían juntos cuando crecieron uno de ellos cambio y le dijo al otro eres un tonto por creer en cosas que no se harán realidad. Y él dijo pues probablemente se harán realidad. Pero el otro dijo no creas en cosas innecesarias. Tiempo después el joven soñador se encontró al otro y le dijo. Pues amigo se me hicieron realidad y usted por no soñar se quedó pobre por siempre”</p> <p>[178] “Un día un niño hijo de la modelo Catalina y del millonario Doctor Ricky salió a dar un paseo con su patineta nueva. Y en el parque se encontraba un niño muy pobre y lo humillaban mucho en especial el niño rico un día se calló de su patineta nueva y lo</p>	
--	---	--

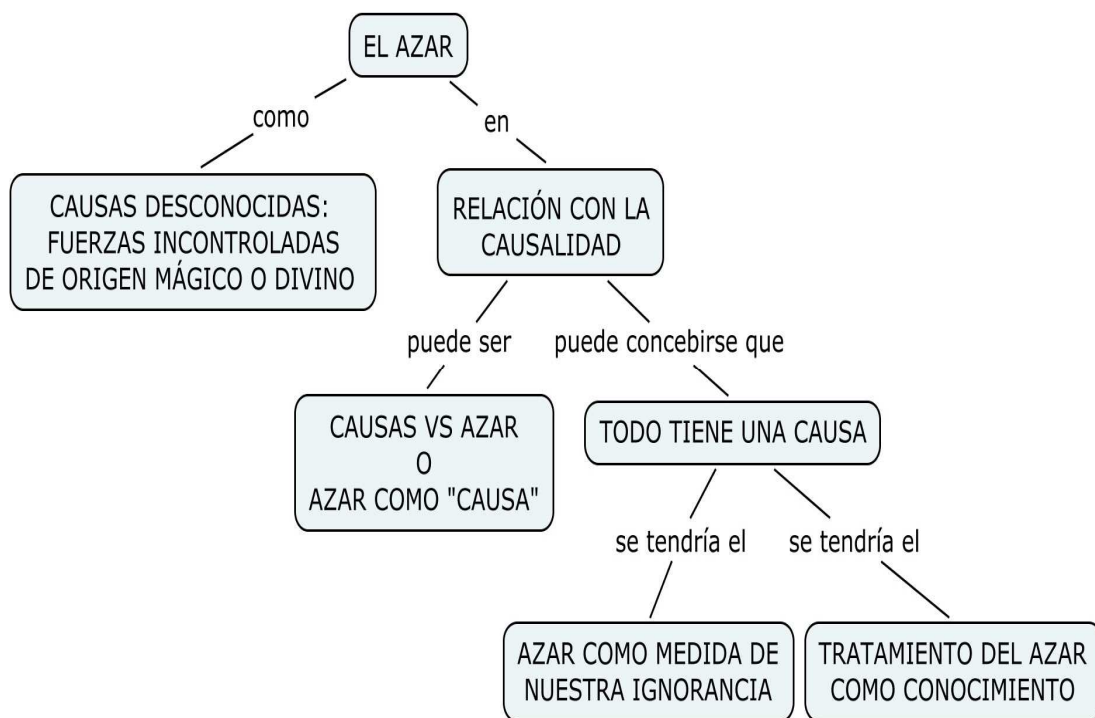
	<p>llevaron a un hospital y el papá preguntó cual es la probabilidad de que mi hijo quede parálítico? Y el doctor dijo –es de un 100%. Luego el niño al ver que no podía caminar cambió su forma de ver el mundo y se volvió humilde”</p> <p>[179] Manuela y Juan estaban participando en un concurso de poesía. Probablemente manuela gane ya que ella entona mejor. Pero probablemente Juan pueda ganar ya que la mayoría de gente vota por él.”</p> <p>[180] “Una vez estábamos en clase de matemáticas y el tema era: estadística y probabilidad. Un tema muy interesante pues son cosas que debemos aplicar en nuestra vida cotidiana. Yo, personalmente le di mucha importancia y aprendí muchas cosas.”</p>	
--	--	--

*Nota. Textos y expresiones tomados literalmente de los estudiantes.*

### ANEXO 3. Esquemas acerca de aspectos epistémicos de los términos *Azar*, *Aleatoriedad* y *Probabilidad*.

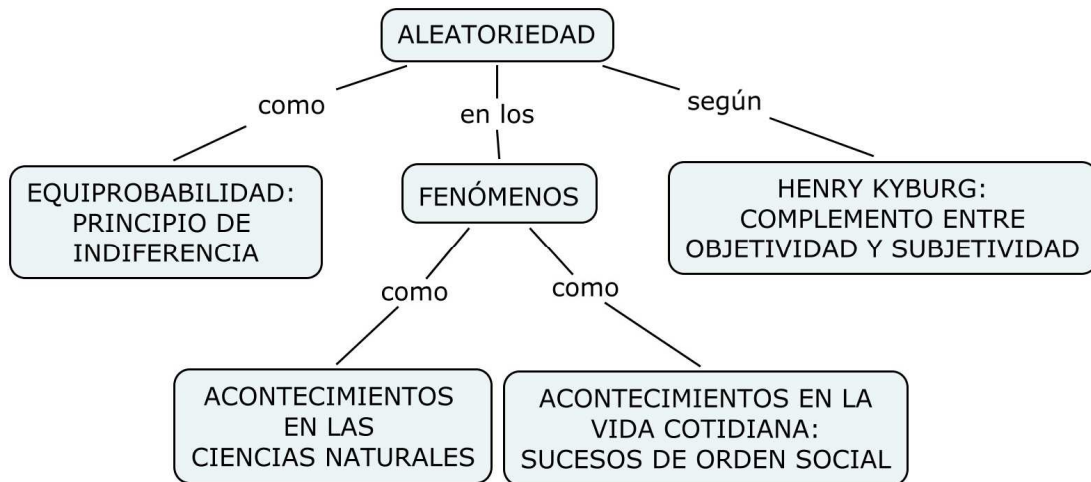
#### ESQUEMA 1.

*Aspectos epistémicos del término Azar.*



## ESQUEMA 2.

Aspectos epistémicos del término Aleatoriedad.



## ESQUEMA 3.

Aspectos epistémicos del término Probabilidad.

